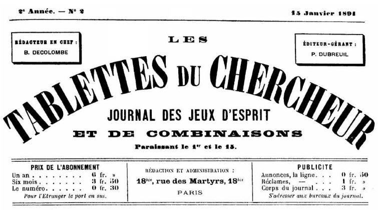
11

Bimagische Quadrate

Der Franzose *Georges Pfeffermann* entdeckte 1890 das erste bimagische Quadrat der Welt und veröffentlichte es am 15. Januar 1891 in der Zeitschrift *Les Tablettes du Chercheur* als Rätsel, bei dem nur einige Zahlen eingetragen waren und andere Felder leer blieben.



2e Année. — N° 2 15 Janvier 1891

RÉDACTEUR EN CHEF : B. DECOLOMBE

LES TABLETTES DU CHERCHEUR

JOURNAL DES JEUX D'ESPRIT ET DE COMBINAISONS

Paraissant le 1er et le 15.

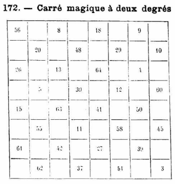
ÉDITEUR-GÉRANT : P. DUBREUIL

PRIX DE L'ABONNEMENT
Un an . . . . 6 fr. »
Six mois . . . . 3 fr. 50
Le numéro . . . . . . 0 fr. 30
Pour l'Etranger le port en sus.

RÉDACTION ET ADMINISTRATION :
18bis, rue des Martyrs, 18bis
PARIS

PUBLICITE
Annonces, la ligne . . . 0 fr. 50
Réclames, — . . . 1 fr. »
Corps du journal . . . 3 fr. »
S'adresser aux bureaux du journal.

172. — Carré magique à deux degrés



56		8		18		9	
	20		48		29		10
26		13		64		4	
	5		30		12		60
15		63		41		50	
	55		11		58		45
61		42		27		39	
	62		37		51		3

14 Tage später präsentierte er dann die Lösung.

56		8		18		9	
	20		48		29		10
26		13		64		4	
	5		30		12		60
15		63		41		50	
	55		11		58		45
61		42		27		39	
	62		37		51		3

56	34	8	57	18	47	9	31
33	20	54	48	7	29	59	10
26	43	13	23	64	38	4	49
19	5	35	30	53	12	46	60
15	25	63	2	41	24	50	40
6	55	17	11	36	58	32	45
61	16	42	52	27	1	39	22
44	62	28	37	14	51	21	3

Abb. 11.1: Das erste bimagische Quadrat der Ordnung $n = 8$ von Pfeffermann

11.1 Ordnung n = 8

11.1.1 Coccoz

Coccoz veröffentlichte 1892 eine Beschreibung des Verfahrens, mit dem die ersten bimagischen Quadrate der Ordnung $n = 8$ erzeugt wurden.[1] Er arbeitet mit zwei Generatoren, die jeweils die Zahlen von 1 bis 64 enthalten. Der erste Generator erzeugt die bimagische Zeilen des Zielquadrates, der zweite die bimagische Spalten. Diese beiden Generatoren werden zunächst zu einem semi-bimagischen Quadrat zusammengesetzt, bevor dann durch das Vertauschen von Zeilen und Spalten auch die Diagonalen bimagisch angeordnet werden. Der letzte Schritt ist allerdings nicht bei jedem mit diesem Verfahren erstellten semi-bimagischen Quadrat möglich.

Um die bimagischen Reihen in den beiden Generatoren zu erhalten, arbeitet Coccoz mit fünf unterschiedlichen Zahlengruppen. In der ersten Gruppe werden die Zahlen von 1 bis 64 in 32 Zahlenpaare unterteilt, von denen jeweils acht die gleiche Summe besitzen.

	A		B		C		D	
	8	9	24	25	40	41	56	57
	7	10	23	26	39	42	55	58
	6	11	22	27	38	43	54	59
	5	12	21	28	37	44	53	60
	4	13	20	29	36	45	52	61
	3	14	19	30	35	46	51	62
	2	15	18	31	34	47	50	63
	1	16	17	32	33	48	49	64
Summe:	17		49		81		113	

Tab. 11.1: Gruppe 1

Die vier Spalten A, B, C und D sind u.a. so gewählt worden, dass die Summe von vier Zahlenpaaren aus diesen Spalten immer 260 ergibt.

$$17 + 49 + 81 + 113 = 260$$

Noch interessanter bei dieser Aufteilung ist aber die Summe der Quadrate dieser Zahlenpaare.

$$\begin{array}{rrrrl}
8^2 + 9^2 = 145 & 24^2 + 25^2 = 1201 & 40^2 + 41^2 = 3281 & 56^2 + 57^2 = 6385 & \downarrow{+4}\ \downarrow{+12} \\
7^2 + 10^2 = 149 & 23^2 + 26^2 = 1205 & 39^2 + 42^2 = 3285 & 55^2 + 58^2 = 6389 & \\
6^2 + 11^2 = 157 & 22^2 + 27^2 = 1213 & 38^2 + 43^2 = 3293 & 54^2 + 59^2 = 6397 & \\
5^2 + 12^2 = 169 & 21^2 + 28^2 = 1225 & 37^2 + 44^2 = 3305 & 53^2 + 60^2 = 6409 & \\
4^2 + 13^2 = 185 & 20^2 + 29^2 = 1241 & 36^2 + 45^2 = 3321 & 52^2 + 61^2 = 6425 & \\
3^2 + 14^2 = 205 & 19^2 + 30^2 = 1261 & 35^2 + 46^2 = 3341 & 51^2 + 62^2 = 6445 & \\
2^2 + 15^2 = 229 & 18^2 + 31^2 = 1285 & 34^2 + 47^2 = 3365 & 50^2 + 63^2 = 6469 & \\
1^2 + 16^2 = 257 & 17^2 + 32^2 = 1313 & 33^2 + 48^2 = 3393 & 49^2 + 64^2 = 6497 &
\end{array}$$

[1] Coccoz [103] S. 136 – 142

Der Zuwachs der Summen ist in den Zeilen der vier Spalten A, B, C und D immer gleich, wenn man die Summen in der oberen Zeile als Basiszahl betrachtet.

Zuwachs	A		B		C		D	
0	8	9	24	25	40	41	56	57
4	7	10	23	26	39	42	55	58
12	6	11	22	27	38	43	54	59
24	5	12	21	28	37	44	53	60
40	4	13	20	29	36	45	52	61
60	3	14	19	30	35	46	51	62
84	2	15	18	31	34	47	50	63
112	1	16	17	32	33	48	49	64

Tab. 11.2: Gruppe 1 mit dem Zuwachs bei den Summen

Der Gesamtzuwachs

$$0 + 4 + 12 + 24 + 40 + 60 + 84 + 112 = 336$$

kann in zwei Teilgruppen mit

$$0 + 24 + 60 + 84 = 4 + 12 + 40 + 112 = \frac{336}{2} = 168$$

aufgeteilt werden. Wählt man nun die vier Zahlenpaare aus den Spalten A, B, C und D so, dass sie aus den Zeilen mit dem Zuwächsen 4, 12, 40 und 112 bzw. 0, 24, 60 und 84 stammen, bilden die acht Zahlen eine bimagische Reihe.

Zuwachs	A		B		C		D	
0	8	9	24	25	40	41	56	57
4	7	10	23	26	39	42	55	58
12	6	11	22	27	38	43	54	59
24	5	12	21	28	37	44	53	60
40	4	13	20	29	36	45	52	61
60	3	14	19	30	35	46	51	62
84	2	15	18	31	34	47	50	63
112	1	16	17	32	33	48	49	64

Tab. 11.3: Bimagische Reihen in Gruppe 1

Für die weiteren vier Gruppen teilt Coccoz die Zahlenpaare etwas anders auf. Hier finden sich die vertikalen acht Zahlenpaare nicht in einer einzigen Tabelle, sondern aufgeteilt in jeweils zwei Hälften. Um eine bimagische Reihe zu erhalten, wählt man aus jeder der beiden Hälften jeweils vier Zahlenpaare so aus, dass alle Spalten A, B, C und D sowie alle vier Zeilen vertreten sind.

An den Summen in der unteren Zeile erkennt man, dass bei jeder Kombination alle acht Zahlen addiert immer die Summe 260 ergeben. Durch die Bedingungen, die an die Wahl der Zahlenpaare gestellt werden, ist aber auch sichergestellt, dass die Quadrate dieser Zahlen 11 180 ergeben. In Tabelle 11.4 ist für jede der beiden Hälften beispielhaft jeweils eine Auswahl angegeben.

Zuwachs	A		B		C		D		A		B		C		D	
0	7	9	24	26	40	42	55	57	8	10	23	25	39	41	56	58
16	5	11	22	28	38	44	53	59	6	12	21	27	37	43	54	60
30	3	13	20	30	36	46	51	61	4	14	19	29	35	45	52	62
48	1	15	18	32	34	48	49	63	2	16	17	31	33	47	50	64
	16		50		82		112		18		48		80		114	

Tab. 11.4: Gruppe 2

Entsprechend kann man die bimagischen Reihen für den Gruppen 3, 4 und 5 gewinnen, deren Aufbau in den Tabellen 11.5 bis 11.7 dargestellt ist.

Zuwachs	A		B		C		D		A		B		C		D	
0	6	9	24	27	40	43	54	57	8	11	22	25	38	41	56	59
8	5	10	23	28	39	44	53	58	7	12	21	26	37	42	55	60
56	2	13	20	31	36	47	50	61	4	15	18	29	34	45	52	63
80	1	14	19	32	35	48	49	62	3	16	17	30	33	46	51	64
	15		51		83		111		19		47		79		115	

Tab. 11.5: Gruppe 3

Zuwachs	A		B		C		D		A		B		C		D	
0	4	9	24	29	40	45	52	57	8	13	20	25	36	41	56	61
12	3	10	23	30	39	46	51	58	7	14	19	26	35	42	55	62
28	2	11	22	31	38	47	50	59	6	15	18	27	34	43	54	63
48	1	12	21	32	37	48	49	60	5	16	17	28	33	44	53	64
	13		53		85		109		21		45		77		117	

Tab. 11.6: Gruppe 4

Zuwachs	A		B		C		D		A		B		C		D	
0	4	5	28	29	44	45	52	53	12	13	20	21	36	37	60	61
4	3	6	27	30	43	46	51	54	11	14	19	22	35	38	59	62
12	2	7	26	31	42	47	50	55	10	15	18	23	34	39	58	63
24	1	8	25	32	41	48	49	56	9	16	17	24	33	40	57	64
	9		57		89		105		25		41		73		121	

Tab. 11.7: Gruppe 5

Beispiel 1

Um ein bimagisches Quadrat zu erzeugen beginnt man mit zwei Generatoren, deren bimagische Reihen aus verschiedenen Gruppen stammen. Für Generator 1 wurden acht Reihen aus den Zahlen der Gruppe 1 gewählt, die in die Zeilen des Generators eingetragen werden. Für den zweiten Generator wurde Gruppe 3 benutzt und die Zahlen werden hier in die Spalten eingetragen.

1	16	22	27	39	42	52	61
2	15	21	28	40	41	51	62
3	14	24	25	37	44	50	63
4	13	23	26	38	43	49	64
5	12	18	31	35	46	56	57
6	11	17	32	36	45	55	58
7	10	20	29	33	48	54	59
8	9	19	30	34	47	53	60

a) Generator 1 (Gruppe 1)

1	2	3	4	5	6	7	8
14	13	16	15	10	9	12	11
20	19	18	17	24	23	22	21
31	32	29	30	27	28	25	26
40	39	38	37	36	35	34	33
43	44	41	42	47	48	45	46
53	54	55	56	49	50	51	52
58	57	60	59	62	61	64	63

b) Generator 2 (Gruppe 3)

Abb. 11.2: Zwei Generatoren aus den Gruppen 1 und 3

In diesem Beispiel stimmen beide Generatoren in der Zahl 1 der linken oberen Ecke überein. Ist dies nicht der Fall, kann man dies durch einen einfachen Zeilentausch, eventuell noch gefolgt vom einen Austausch von zwei Zahlen der oberen Zeile, erreichen.

Das Grundidee der Methode von Coccoz besteht darin, das gesamte Quadrat in 2 x 2 - Blöcke aufzuteilen, deren Zahlen auf den Diagonalen immer bestimmte Werte annehmen. Durch das Vertauschen von Zeilen und Zahlenpaaren innerhalb der Zeilen wird der erste Generator dann schrittweise in ein semi-bimagisches Quadrat umgewandelt.

In diesem Beispiel beträgt die Summe der Zahlen jeweils 65. Da im Block der linken oberen Ecke bereits die Zahl 1 eingetragen ist, muss die Partnerzahl 64 in die rechte untere Ecke dieses 2 x 2 - Blocks platziert werden. Dazu vertauscht man zunächst die zweite Zeile von oben mit der Zeile, die die Zahl 64 enthält. Dann wird die Zahl 64 durch einen einfachen Austausch an der gewünschten Stelle platziert. Damit besitzt die erste der beiden Diagonalensummen in diesem Block bereits die geforderte Summe 65.

1	16	22	27	39	42	52	61
2	15	21	28	40	41	51	62
3	14	24	25	37	44	50	63
4	13	23	26	38	43	49	64
5	12	18	31	35	46	56	57
6	11	17	32	36	45	55	58
7	10	20	29	33	48	54	59
8	9	19	30	34	47	53	60

1	16	22	27	39	42	52	61
4	13	23	26	38	43	49	64
3	14	24	25	37	44	50	63
2	15	21	28	40	41	51	62
5	12	18	31	35	46	56	57
6	11	17	32	36	45	55	58
7	10	20	29	33	48	54	59
8	9	19	30	34	47	53	60

1	16	22	27	39	42	52	61
4	64	23	26	38	43	49	13
3	14	24	25	37	44	50	63
2	15	21	28	40	41	51	62
5	12	18	31	35	46	56	57
6	11	17	32	36	45	55	58
7	10	20	29	33	48	54	59
8	9	19	30	34	47	53	60

Abb. 11.3: Schritt 1

Der zweite Schritt ist jetzt etwas komplizierter, da mehrere Bedingungen erfüllt werden müssen. In den oberen beiden Zeilen müssen zwei Zahlen gefunden werden, die

- auch die Summe 65 ergeben

- in den beiden freien Plätzen des linken oberen 2 x 2 - Blocks platziert werden können
- auch in den beiden durch die Zahlen 1 und 64 vorgegebenen Spalten des zweiten Generators liegen

Werden solche Zahlen gefunden, können sie mit den Zahlen getauscht werden, die sich bisher auf den benötigten Plätzen befinden. Insgesamt wird durch dieses Vorgehen die bimagische Summe in den beteiligten Zeilen nicht zerstört und die Spalten gemäß den bimagischen Spalten des zweiten Generators gefüllt.

1	2	3	4	5	6	7	8
14	13	16	15	10	9	12	11
20	19	18	17	24	23	22	21
31	32	29	30	27	28	25	26
40	39	38	37	36	35	34	33
43	44	41	42	47	48	45	46
53	54	55	56	49	50	51	52
58	57	60	59	62	61	64	63

a) Generator 2

1	16	22	27	39	42	52	61
4	64	23	26	38	43	49	13
3	14	24	25	37	44	50	63
2	15	21	28	40	41	51	62
5	12	18	31	35	46	56	57
6	11	17	32	36	45	55	58
7	10	20	29	33	48	54	59
8	9	19	30	34	47	53	60

b) Generator 1: Partnerzahlen

1	22	16	27	39	42	52	61
43	64	23	26	38	4	49	13
3	14	24	25	37	44	50	63
2	15	21	28	40	41	51	62
5	12	18	31	35	46	56	57
6	11	17	32	36	45	55	58
7	10	20	29	33	48	54	59
8	9	19	30	34	47	53	60

c) Generator 1: Tausch von Zahlen

Abb. 11.4: Schritt 2

Der rechts daneben liegende 2 x 2 - Block wird dann mit den Zahlen 16, 27, 38 und 49 aus den oberen beiden Zeilen gefüllt. Auch im zweiten Generator liegen diese vier Zahlen in nur zwei Spalten.

1	2	3	4	5	6	7	8
14	13	16	15	10	9	12	11
20	19	18	17	24	23	22	21
31	32	29	30	27	28	25	26
40	39	38	37	36	35	34	33
43	44	41	42	47	48	45	46
53	54	55	56	49	50	51	52
58	57	60	59	62	61	64	63

a) Generator 2

1	22	16	27	39	42	52	61
43	64	38	49	23	4	26	13
3	14	24	25	37	44	50	63
2	15	21	28	40	41	51	62
5	12	18	31	35	46	56	57
6	11	17	32	36	45	55	58
7	10	20	29	33	48	54	59
8	9	19	30	34	47	53	60

b) Generator 1: Partnerzahlen

Abb. 11.5: Schritt 3

Entsprechend werden die weiteren Blöcke in den beiden oberen Zeilen gefüllt.

1	22	16	27	39	52	42	61
43	64	38	49	13	26	4	23
3	14	24	25	37	44	50	63
2	15	21	28	40	41	51	62
5	12	18	31	35	46	56	57
6	11	17	32	36	45	55	58
7	10	20	29	33	48	54	59
8	9	19	30	34	47	53	60

a) Generator 1: dritter Block

1	22	16	27	39	52	42	61
43	64	38	49	13	26	4	23
3	14	24	25	37	44	50	63
2	15	21	28	40	41	51	62
5	12	18	31	35	46	56	57
6	11	17	32	36	45	55	58
7	10	20	29	33	48	54	59
8	9	19	30	34	47	53	60

b) Generator 1: vierter Block

Abb. 11.6: Schritt 4

Für die nächste Zeile des Zielquadrates wird eine noch unbenutzte Zahl aus der ersten Spalte des zweiten Generators gesucht, z.B. 14. Diese Zahl wird an den linken Rand der Zeile getauscht und die Partnerzahl entsprechend auf die zugehörige Diagonale. Befindet sich diese Partnerzahl 51 nicht in der Zeile darunter, wird dies durch einen Zeilentausch sichergestellt.

Danach kann die zweite Diagonale mit den Zahlen 25 und 40 gefüllt werden.

1	22	16	27	39	52	42	61
43	64	38	49	13	26	4	23
14	3	24	25	37	44	50	63
2	51	21	28	40	41	15	62
5	12	18	31	35	46	56	57
6	11	17	32	36	45	55	58
7	10	20	29	33	48	54	59
8	9	19	30	34	47	53	60

a) Generator 1: erste Diagonale

1	22	16	27	39	52	42	61
43	64	38	49	13	26	4	23
14	25	24	3	37	44	50	63
40	51	21	28	2	41	15	62
5	12	18	31	35	46	56	57
6	11	17	32	36	45	55	58
7	10	20	29	33	48	54	59
8	9	19	30	34	47	53	60

b) Generator 1: zweite Diagonale

Abb. 11.7: Schritt 5

Bei dem rechts daneben liegenden 2 x 2 - Block ist die Auswahl der nächsten Diagonalen etwas eingeschränkter. Um die Spalte bimagisch zu machen, muss die nächste Zahl in der Spalte des zweiten Generators liegen, in der auch die bereits vorhandenen Zahlen 16 und 38 liegen. Damit ergibt sich dieser 2 x 2 - Block mit den Zahlen 3, 24, 41 und 2.

Entsprechend werden dann die beiden nächsten Blöcke in diesen beiden Zeilen gefüllt.

1	22	16	27	39	52	42	61
43	64	38	49	13	26	4	23
14	25	3	24	37	44	50	63
40	51	41	62	2	21	15	28
5/7	10/12	18/20	31/29	35/33	46/48	56/54	57/59
6	11	17	32	36	45	55	58
7	10	20	29	33	48	54	59
8	9	19	30	34	47	53	60

a) Generator 1: zweiter 2 x 2 - Block

1	22	16	27	39	52	42	61
43	64	38	49	13	26	4	23
14	25	3	24	44	63	37	50
40	51	41	62	2	21	15	28
5	12	18	31	35	46	56	57
6	11	17	32	36	45	55	58
7	10	20	29	33	48	54	59
8	9	19	30	34	47	53	60

b) Generator 1: zwei weitere Blöcke

Abb. 11.8: Schritt 6

Werden nach diesem Schema auch die Zahlen der unteren Hälfte des Quadrates angeordnet, entsteht das semi-bimagische Quadrat aus Abbildung 11.9.

1	22	16	27	39	52	42	61
43	64	38	49	13	26	4	23
14	25	3	24	44	63	37	50
40	51	41	62	2	21	15	28
20	7	29	10	54	33	59	48
58	45	55	36	32	11	17	6
31	12	18	5	57	46	56	35
53	34	60	47	19	8	30	9

Abb. 11.9: Semi-bimagisches Quadrat

Dieses semi-bimagische Quadrat muss jetzt noch in ein bimagisches umgewandelt werden. Dazu müssen unter den 38 039 bimagischen Reihen zwei passende gefunden werden, um durch das Vertauschen von Zeilen und Spalten ein bimagisches Quadrat zu erzeugen. Dazu kann man beispielsweise die beiden bimagischen Reihen aus Tabelle 11.8 benutzen.

Diagonale 1	4	14	18	32	33	47	51	61
Diagonale 2	5	11	23	25	40	42	54	60

Tab. 11.8: Bimagische Reihen für die Diagonalen, um das bimagische Quadrat zu erzeugen

Wie man in Abbildung 11.10a erkennt, ist in jeder Zeile und Spalte des semi-bimagischen Quadrates jeweils eine Zahl der beiden für die Diagonalen vorgesehenen magischen Reihen vorhanden. Deshalb kann man die Zeilen und Spalten so vertauschen, dass die entsprechenden Zahlen wie im bimagischen Quadrat der Abbildung 11.10b auf den Diagonalen liegen.

1	22	16	27	39	52	42	61
43	64	38	49	13	26	4	23
14	25	3	24	44	63	37	50
40	51	41	62	2	21	15	28
20	7	29	10	54	33	59	48
58	45	55	36	32	11	17	6
31	12	18	5	57	46	56	35
53	34	60	47	19	8	30	9

a) semi-bimagisches Quadrat

61	27	1	39	52	22	16	42
9	47	53	19	8	34	60	30
50	24	14	44	63	25	3	37
6	36	58	32	11	45	55	17
48	10	20	54	33	7	29	59
28	62	40	2	21	51	41	15
35	5	31	57	46	12	18	56
23	49	43	13	26	64	38	4

b) bimagisches Quadrat

Abb. 11.10: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 8$ (Coccoz, Beispiel 1)

In Beispiel 1 lagen die Zahlen für die bimagischen Diagonalen vollständig in den 2 x 2 - Blöcken. Sie können aber auch anders angeordnet sein, etwa als Diagonalen in diesen Blöcken. So entsteht aus dem semi-bimagischen Quadrat ein völlig anderes bimagisches Quadrat wie in Abbildung 11.11.

1	22	16	27	39	52	42	61
43	64	38	49	13	26	4	23
14	25	3	24	44	63	37	50
40	51	41	62	2	21	15	28
20	7	29	10	54	33	59	48
58	45	55	36	32	11	17	6
31	12	18	5	57	46	56	35
53	34	60	47	19	8	30	9

a) semi-bimagisches Quadrat

16	27	52	39	22	1	42	61
38	49	26	13	64	43	4	23
3	24	63	44	25	14	37	50
41	62	21	2	51	40	15	28
55	36	11	32	45	58	17	6
29	10	33	54	7	20	59	48
60	47	8	19	34	53	30	9
18	5	46	57	12	31	56	35

b) bimagisches Quadrat

Abb. 11.11: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 8$ (Coccoz, Variante)

Prinzipiell können die jeweils acht Zahlen für die beiden bimagischen Reihen auch völlig unabhängig voneinander gewählt werden. Da allerdings zu dieser Zeit erst wenige bimagische Reihen bekannt waren und Coccoz bei seiner Methode mit Zahlenpaaren auf den Diagonalen der 2 x 2 - Blöcke arbeitet, wurden diese auch bei den Diagonalen benutzt.

Beispiel 2

Im ersten Beispiel besaßen alle Diagonalen die Summe 65. Coccoz vermutete, dass insgesamt sieben verschiedene Summen benutzt werden können, ohne dies allerdings zu beweisen. Besitzen die beiden Zahlen einer Diagonalen eine der sieben folgenden Summen p, muss die andere Diagonale die Summe $130 - p$ besitzen.

$$33 \quad 49 \quad 57 \quad 61 \quad 63 \quad 64 \quad 65$$

Im zweiten Beispiel wird die Gruppe 5 für die bimagischen Zeilen des ersten Generators, sowie die Gruppe 3 für die Spalten des zweiten Generators benutzt.

1	8	26	31	43	46	52	53
2	7	25	32	44	45	51	54
3	6	28	29	41	48	50	55
4	5	27	30	42	47	49	56
9	16	18	23	35	38	60	61
10	15	17	24	36	37	59	62
11	14	20	21	33	40	58	63
12	13	19	22	34	39	57	64

a) Generator 1 (Gruppe 5)

1	2	3	4	5	6	7	8
14	13	16	15	10	9	12	11
24	23	22	21	20	19	18	17
27	28	25	26	31	32	29	30
39	40	37	38	35	36	33	34
44	43	42	41	48	47	46	45
50	49	52	51	54	53	56	55
61	62	63	64	57	58	59	60

b) Generator 2 (Gruppe 3)

Abb. 11.12: Zwei Generatoren aus den Gruppen 5 und 3

Aus diesen beiden Generatoren erzeugt man beispielsweise das semi-bimagische Quadrat aus Abbildung 11.13a. Durch Vertauschen von Zeilen und Spalten werden danach die beiden Diagonalen bimagisch gemacht und es entsteht das bimagische Quadrat in Abbildung 11.13b.

1	8	26	31	43	46	52	53
61	60	38	35	23	18	16	9
27	30	4	5	49	56	42	47
39	34	64	57	13	12	22	19
44	45	51	54	2	7	25	32
24	17	15	10	62	59	37	36
50	55	41	48	28	29	3	6
14	11	21	20	40	33	63	58

a) semi-bimagisches Quadrat

31	26	43	46	1	8	53	52
35	38	23	18	61	60	9	16
5	4	49	56	27	30	47	42
57	64	13	12	39	34	19	22
54	51	2	7	44	45	32	25
10	15	62	59	24	17	36	37
48	41	28	29	50	55	6	3
20	21	40	33	14	11	58	63

b) bimagisches Quadrat

Abb. 11.13: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 8$ (Coccoz, Beispiel 2)

Beispiel 3

Im dritten Beispiel werden die Diagonalensummen 33 und 97 verwendet. Für die Generatoren werden Zahlen aus den Gruppen 2 und 4 gewählt.

1	15	20	30	40	42	53	59
2	16	19	29	39	41	54	60
3	13	18	32	38	44	55	57
4	14	17	31	37	43	56	58
5	11	24	26	36	46	49	63
6	12	23	25	35	45	50	64
7	9	22	28	34	48	51	61
8	10	21	27	33	47	52	62

a) Generator 1 (Gruppe 2)

1	2	3	4	5	6	7	8
12	11	10	9	16	15	14	13
22	21	24	23	18	17	20	19
31	32	29	30	27	28	25	26
39	40	37	38	35	36	33	34
46	45	48	47	42	41	44	43
52	51	50	49	56	55	54	53
57	58	59	60	61	62	63	64

b) Generator 2 (Gruppe 4)

Abb. 11.14: Zwei Generatoren aus den Gruppen 2 und 4

Mit den Diagonalensummen 33 und 97 entsteht zunächst das semi-bimagische Quadrat in Abbildung 11.15a, das dann durch Vertauschen von Zeilen und Spalten in das bimagische Quadrat der Abbildung 11.15b überführt wird.

1	40	20	53	15	42	30	59
57	32	44	13	55	18	38	3
12	45	25	64	6	35	23	50
52	21	33	8	62	27	47	10
22	51	7	34	28	61	9	48
46	11	63	26	36	5	49	24
31	58	14	43	17	56	4	37
39	2	54	19	41	16	60	29

a) semi-bimagisches Quadrat

53	20	15	42	40	1	30	59
13	44	55	18	32	57	38	3
64	25	6	35	45	12	23	50
8	33	62	27	21	52	47	10
19	54	41	16	2	39	60	29
43	14	17	56	58	31	4	37
26	63	36	5	11	46	49	24
34	7	28	61	51	22	9	48

b) bimagisches Quadrat

Abb. 11.15: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 8$ (Coccoz, Beispiel 3)

Insgesamt lassen sich mit den Kombinationen der fünf Gruppen 2188 wirklich unterschiedliche bimagische Quadrate erzeugen. Aus jedem einzelnen dieser Quadrate können dann noch einmal 1536 weitere bimagische Quadrate erzeugt werden, die aber alle die prinzipiell gleiche Struktur besitzen.[2]

Varianten

In einem Artikel aus dem Jahre 1893 gibt Coccoz einige Möglichkeiten an, wie man weitere bimagische Quadrate erzeugen kann. In seinem Beispiel[3] erzeugt er ein bimagisches Quadrat, indem er bei den Generatoren mit Zahlen aus den Gruppen 4 und 2 beginnt.[4]

[2] siehe Kapitel 11.1.14
[3] siehe Coccoz [103] S. 172, Abbildung 1
[4] Coccoz [104]

1	12	22	31	40	45	51	58
2	11	21	32	39	46	52	57
3	10	24	29	38	47	49	60
4	9	23	30	37	48	50	59
5	16	18	27	36	41	55	62
6	15	17	28	35	42	56	61
7	14	20	25	34	43	53	64
8	13	19	26	33	44	54	63

a) Generator 1 (Gruppe 4)

1	2	3	4	5	6	7	8
15	16	13	14	11	12	9	10
24	23	22	21	20	19	18	17
26	25	28	27	30	29	32	31
36	35	34	33	40	39	38	37
46	45	48	47	42	41	44	43
53	54	55	56	49	50	51	52
59	60	57	58	63	64	61	62

b) Generator 2 (Gruppe 2)

Abb. 11.16: Zwei Generatoren aus den Gruppen 4 und 2

Mit diesen beiden Generatoren erhält man beispielsweise das semi-bimagische Quadrat aus Abbildung 11.17, bei dem zusätzlich noch ein Zeilentausch vorgenommen wird, damit man die Gemeinsamkeiten zu dem bisherigen Beispiel von Coccoz besser erkennt.

1	51	22	40	31	45	12	58
46	32	57	11	52	2	39	21
15	61	28	42	17	35	6	56
36	18	55	5	62	16	41	27
24	38	3	49	10	60	29	47
59	9	48	30	37	23	50	4
26	44	13	63	8	54	19	33
53	7	34	20	43	25	64	14

a) semi-bimagisches Quadrat

24	38	3	49	10	60	29	47
46	32	57	11	52	2	39	21
53	7	34	20	43	25	64	14
15	61	28	42	17	35	6	56
1	51	22	40	31	45	12	58
59	9	48	30	37	23	50	4
36	18	55	5	62	16	41	27
26	44	13	63	8	54	19	33

b) mit vertauschten Zeilen

Abb. 11.17: Semi-bimagisches Quadrat

Mit zwei geeigneten bimagischen Reihen für die Diagonalen

Diagonale 1	2	6	27	31	44	48	49	53
Diagonale 2	12	16	17	21	34	38	59	63

Tab. 11.9: Bimagische Reihen für die Diagonalen

entsteht dann das bimagische Quadrat aus Abbildung 11.18.

24	38	3	49	10	60	29	47
46	32	57	11	52	2	39	21
53	7	34	20	43	25	64	14
15	61	28	42	17	35	6	56
1	51	22	40	31	45	12	58
59	9	48	30	37	23	50	4
36	18	55	5	62	16	41	27
26	44	13	63	8	54	19	33

a) semi-bimagisches Quadrat

38	47	3	10	29	24	60	49
32	21	57	52	39	46	2	11
7	14	34	43	64	53	25	20
61	56	28	17	6	15	35	42
51	58	22	31	12	1	45	40
9	4	48	37	50	59	23	30
18	27	55	62	41	36	16	5
44	33	13	8	19	26	54	63

b) bimagisches Quadrat

Abb. 11.18: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 8$ (Coccoz, Beispiel 4)

Coccoz ordnet 32 Zahlen aus vier Zeilen besonders an. Damit die nachfolgenden Schritte verständlicher werden, werden diese vier Zeilen wie in Abbildung 11.19a in die obere Hälfte des Quadrates verschoben. Dadurch geht zwar die bimagische Eigenschaft verloren, aber das Quadrat bleibt weiterhin semi-bimagisch.

In diesen vier Zeilen der oberen Hälfte ordnet Coccoz 16 Zahlenpaare so an, dass deren Summe jeweils 65 beträgt.

38	47	3	10	29	24	60	49
18	27	55	62	41	36	16	5
61	56	28	17	6	15	35	42
9	4	48	37	50	59	23	30
32	21	57	52	39	46	2	11
7	14	34	43	64	53	25	20
51	58	22	31	12	1	45	40
44	33	13	8	19	26	54	63

a) Verschieben von vier Zeilen

38	27	55	10	41	24	60	5
18	47	3	62	29	36	16	49
61	4	48	17	50	15	35	30
9	56	28	37	6	59	23	42
32	21	57	52	39	46	2	11
7	14	34	43	64	53	25	20
51	58	22	31	12	1	45	40
44	33	13	8	19	26	54	63

b) Aufteilung in 16 Zahlenpaare

Abb. 11.19: Anordnung von 16 Zahlenpaaren mit der Summe 65 in der oberen Hälfte

Den gleichen Effekt wie die Aufteilung in 16 Zahlenpaare kann man auch mit dem vertikalen Tausch von vier Zahlenpaaren in jeweils zwei dieser Zeilen erreichen, wie es in Abbildung 11.20 dargestellt ist. Die Beschreibung mit Hilfe von Vertauschungen macht den Vorgang etwas klarer und eröffnet viele weitere Möglichkeiten zum Vertauschen von Zahlen in den Zeilen eines semi-bimagischen Quadrates.

38	27	55	10	41	24	60	5
18	47	3	62	29	36	16	49
61	4	48	17	50	15	35	30
9	56	28	37	6	59	23	42
32	21	57	52	39	46	2	11
7	14	34	43	64	53	25	20
51	58	22	31	12	1	45	40
44	33	13	8	19	26	54	63

Abb. 11.20: Vertauschen von Zahlenpaaren in der oberen Hälfte

Obwohl keine ganzen Zeilen, sondern nur vier Zahlen ausgetauscht werden, bleibt die semi-bimagische Eigenschaft erhalten. Das erkennt man an den Summen der vertauschten Zahlen. So gilt etwa für die oberen beiden Zeilen:

$$47 + 3 + 29 + 49 = 128 \qquad 47^2 + 3^2 + 29^2 + 49^2 = 5460$$
$$27 + 55 + 41 + 5 = 128 \qquad 27^2 + 55^2 + 41^2 + 5^2 = 5460$$

Ebenso stimmen die Summen der entsprechenden Zahlen sowie die Summen der quadrierten Zahlen in den beiden unteren Zeilen überein, so dass man diese Zahlen austauschen kann.

$$4 + 48 + 50 + 30 = 132 \qquad 4^2 + 48^2 + 50^2 + 30^2 = 5720$$
$$56 + 28 + 6 + 42 = 132 \qquad 56^2 + 28^2 + 6^2 + 42^2 = 5720$$

Um dieses semi-bimagische Quadrat nach der Transformation in ein bimagisches umzuwandeln, werden wieder geeignete bimagische Reihen als Diagonalen benötigt, wie etwa die aus Tabelle 11.10.

Diagonale 1	12	16	17	21	34	38	59	63
Diagonale 2	9	13	20	24	35	39	58	62

Tab. 11.10: Bimagische Reihen für die Diagonalen

Abschließend können diese Zahlen auf den Diagonalen platziert werden, so dass das bimagische Quadrat aus Abbildung 11.21 entsteht.

38	27	55	10	41	24	60	5
18	47	3	62	29	36	16	49
61	4	48	17	50	15	35	30
9	56	28	37	6	59	23	42
32	21	57	52	39	46	2	11
7	14	34	43	64	53	25	20
51	58	22	31	12	1	45	40
44	33	13	8	19	26	54	63

a) semi-bimagisches Quadrat

38	60	41	5	55	27	10	24
18	16	29	49	3	47	62	36
51	45	12	40	22	58	31	1
44	54	19	63	13	33	8	26
7	25	64	20	34	14	43	53
32	2	39	11	57	21	52	46
61	35	50	30	48	4	17	15
9	23	6	42	28	56	37	59

b) bimagisches Quadrat

Abb. 11.21: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 8$ (Coccoz, Beispiel 5)

Mit diesem Beispiel hat Coccoz gezeigt, dass man durch das Vertauschen von Zahlen, bei denen die Summen übereinstimmen, ein bimagisches Quadrat in ein anderes transformieren kann. Diese Transformation ist aber nicht allgemein gültig, sondern ebenso wie weitere Transformationen immer nur bei speziellen bimagischen Quadraten möglich, wenn die Summen der Zahlen und der quadrierten Zahlen in zwei Zeilen übereinstimmen.

Weitere Beispiele von Transformationen

Nun soll noch eine kleine Auswahl von weiteren Transformationen angegeben werden, um die Vielfalt von Möglichkeiten zu verdeutlichen. In den ersten beiden Beispielen werden jeweils vier Zahlen aus zwei Zahlenpaaren gegeneinander ausgetauscht. Unter den Abbildungen 11.22 sowie 11.24 sind jeweils die Summen der Zahlen sowie der quadrierten Zahlen angegeben, an denen man erkennen kann, dass mit der Transformation mindestens wieder ein semi-bimagisches Quadrat entsteht.

3	56	14	57	31	44	18	37
55	4	58	13	43	32	38	17
34	21	47	28	62	9	51	8
22	33	27	48	10	61	7	52
45	26	36	23	49	6	64	11
25	46	24	35	5	50	12	63
16	59	1	54	20	39	29	42
60	15	53	2	40	19	41	30

a) bimagisches Quadrat

34	56	47	57	31	9	18	8
55	4	58	13	43	32	38	17
3	21	14	28	62	44	51	37
22	33	27	48	10	61	7	52
45	26	36	23	49	6	64	11
60	46	53	35	5	19	12	30
16	59	1	54	20	39	29	42
25	15	24	2	40	50	41	63

b) transformiertes Quadrat

Abb. 11.22: Transformation eines bimagischen Quadrates in ein semi-bimagisches Quadrat

$$3 + 14 + 44 + 37 = 98 \qquad 3^2 + 14^2 + 44^2 + 37^2 = 3510$$
$$34 + 47 + 9 + 8 = 98 \qquad 34^2 + 47^2 + 9^2 + 8^2 = 3510$$
$$25 + 24 + 50 + 63 = 162 \qquad 25^2 + 24^2 + 50^2 + 63^2 = 7670$$
$$60 + 53 + 19 + 30 = 162 \qquad 60^2 + 53^2 + 19^2 + 30^2 = 7670$$

Im ersten Beispiel sind einige Zahlen auf den Diagonalen vom Austausch betroffen, so dass das transformierte Quadrat nur semi-bimagisch ist. Durch geeignete bimagische Reihen, deren Zahlen durch das Vertauschen von Zeilen und Spalten auf den Diagonalen platziert werden, entsteht dann ein bimagisches Quadrat.

56	31	9	34	57	18	47	8
4	43	32	55	13	38	58	17
21	62	44	3	28	51	14	37
33	10	61	22	48	7	27	52
15	40	50	25	2	41	24	63
59	20	39	16	54	29	1	42
46	5	19	60	35	12	53	30
26	49	6	45	23	64	36	11

Abb. 11.23: Bimagisches Quadrat

Im zweiten Beispiel sind die Diagonalen dagegen vom Austausch der Zahlen nicht betroffen und das transformierte Quadrat ist bimagisch.

11	36	55	32	6	45	58	17
64	23	4	43	49	26	13	38
29	54	33	10	20	59	48	7
42	1	22	61	39	16	27	52
51	28	15	40	62	21	2	41
8	47	60	19	9	34	53	30
37	14	25	50	44	3	24	63
18	57	46	5	31	56	35	12

a) bimagisches Quadrat

11	54	55	10	20	45	48	17
64	23	4	43	49	26	13	38
29	36	33	32	6	59	58	7
42	1	22	61	39	16	27	52
51	28	15	40	62	21	2	41
8	57	60	5	31	34	35	30
37	14	25	50	44	3	24	63
18	47	46	19	9	56	53	12

b) transformiertes Quadrat

Abb. 11.24: Transformation eines bimagischen Quadrates in ein anderes bimagisches Quadrat

$$
\begin{aligned}
36 + 32 + 6 + 58 &= 132 & \qquad 36^2 + 32^2 + 6^2 + 58^2 &= 5720 \\
54 + 10 + 20 + 48 &= 132 & 54^2 + 10^2 + 20^2 + 48^2 &= 5720 \\
47 + 19 + 9 + 53 &= 128 & 47^2 + 19^2 + 9^2 + 53^2 &= 5460 \\
57 + 5 + 31 + 35 &= 128 & 57^2 + 5^2 + 31^2 + 35^2 &= 5460
\end{aligned}
$$

Die nächsten beiden Beispiele in den Abbildungen 11.25 und 11.26 lassen erkennen, dass in einigen Fällen auch durch einen Austausch von vier Zahlen in nur zwei Zeilen wieder mindestens ein semi-bimagisches Quadrat entsteht. In beiden hier dargestellten Beispielen ist das transformierte Quadrat sogar wieder bimagisch.

2	41	48	7	30	53	52	27
37	14	11	36	57	18	23	64
62	21	20	59	34	9	16	39
25	50	55	32	5	46	43	4
51	28	29	54	47	8	1	42
24	63	58	17	12	35	38	13
15	40	33	10	19	60	61	22
44	3	6	45	56	31	26	49

a) bimagisches Quadrat

2	41	48	7	30	53	52	27
37	14	11	36	57	18	23	64
62	21	20	59	34	9	16	39
25	50	55	32	5	46	43	4
51	28	29	54	47	8	1	42
24	3	58	45	56	35	26	13
15	40	33	10	19	60	61	22
44	63	6	17	12	31	38	49

b) transformiertes Quadrat

Abb. 11.25: Transformation eines bimagischen Quadrates in ein anderes bimagisches Quadrat

$$
\begin{aligned}
63 + 17 + 12 + 38 &= 130 & \qquad 63^2 + 17^2 + 12^2 + 38^2 &= 5846 \\
3 + 45 + 56 + 26 &= 130 & 3^2 + 45^2 + 56^2 + 26^2 &= 5846
\end{aligned}
$$

6	29	42	49	39	64	11	20
32	7	52	43	61	38	17	10
50	41	30	5	19	12	63	40
44	51	8	31	9	18	37	62
25	2	53	46	60	35	24	15
3	28	47	56	34	57	14	21
45	54	1	26	16	23	36	59
55	48	27	4	22	13	58	33

a) bimagisches Quadrat

6	29	42	49	39	64	11	20
32	7	52	43	61	38	17	10
44	51	30	5	19	12	37	62
50	41	8	31	9	18	63	40
25	2	53	46	60	35	24	15
3	28	47	56	34	57	14	21
45	54	1	26	16	23	36	59
55	48	27	4	22	13	58	33

b) transformiertes Quadrat

Abb. 11.26: Transformation eines bimagischen Quadrates in ein anderes bimagisches Quadrat

$$50 + 41 + 63 + 40 = 194 \qquad 50^2 + 41^2 + 63^2 + 40^2 = 9750$$
$$44 + 51 + 37 + 62 = 194 \qquad 44^2 + 51^2 + 37^2 + 62^2 = 9750$$

Die beiden Beispiele in den Abbildungen 11.27 und 11.28 zeigen, dass die Übereinstimmung der Summen natürlich auch in den Spalten stattfinden kann. Auch in diesen Fällen kann eine Transformation durchgeführt werden, die wie in diesen beiden Beispielen zumindest semi-bimagische Quadrate ergibt.

5	24	63	46	12	25	50	35
10	27	52	33	7	22	61	48
19	2	41	60	30	15	40	53
32	13	38	55	17	4	43	58
57	44	3	18	56	37	14	31
54	39	16	29	59	42	1	20
47	62	21	8	34	51	28	9
36	49	26	11	45	64	23	6

a) bimagisches Quadrat

5	24	63	46	12	25	50	35
10	52	27	33	48	22	61	7
19	41	2	60	53	15	40	30
32	13	38	55	17	4	43	58
57	3	44	18	31	37	14	56
54	39	16	29	59	42	1	20
47	62	21	8	34	51	28	9
36	26	49	11	6	64	23	45

b) transformiertes Quadrat

Abb. 11.27: Transformation eines bimagischen Quadrates in ein semi-bimagisches Quadrat

$$27 + 2 + 44 + 49 = 122 \qquad 27^2 + 2^2 + 44^2 + 49^2 = 5070$$
$$52 + 41 + 3 + 26 = 122 \qquad 52^2 + 41^2 + 3^2 + 26^2 = 5070$$
$$7 + 30 + 56 + 45 = 138 \qquad 7^2 + 30^2 + 56^2 + 45^2 = 6110$$
$$48 + 53 + 31 + 6 = 138 \qquad 48^2 + 53^2 + 31^2 + 6^2 = 6110$$

3	32	59	40	18	13	42	53
10	21	50	45	27	8	35	64
29	2	37	58	16	19	56	43
24	11	48	51	5	26	61	34
47	52	23	12	62	33	6	25
38	57	30	1	55	44	15	20
49	46	9	22	36	63	28	7
60	39	4	31	41	54	17	14

a) bimagisches Quadrat

3	32	59	40	18	13	42	53
50	21	10	45	35	8	27	64
29	2	37	58	16	19	56	43
48	11	24	51	61	26	5	34
47	52	23	12	62	33	6	25
30	57	38	1	15	44	55	20
49	46	9	22	36	63	28	7
4	39	60	31	17	54	41	14

b) transformiertes Quadrat

Abb. 11.28: Transformation eines bimagischen Quadrates in ein semi-bimagisches Quadrat

$$\begin{aligned} 10+24+38+60 &= 132 & \qquad 10^2+24^2+38^2+60^2 &= 5720 \\ 50+48+30+4 &= 132 & 50^2+48^2+30^2+4^2 &= 5720 \\ 27+5+55+41 &= 128 & 27^2+5^2+55^2+41^2 &= 5460 \\ 35+61+15+17 &= 128 & 35^2+61^2+15^2+17^2 &= 5460 \end{aligned}$$

Die beiden durch die Transformation erzeugten semi-bimagischen Quadrate können dann wie üblich in bimagische Quadrate umgewandelt werden. Die beiden Ergebnisse sind in den Abbildungen 11.29a und 11.29b dargestellt.

50	12	35	25	46	24	63	5
61	48	7	22	33	52	27	10
40	53	30	15	60	41	2	19
43	17	58	4	55	13	38	32
1	59	20	42	29	39	16	54
14	31	56	37	18	3	44	57
23	6	45	64	11	26	49	36
28	34	9	51	8	62	21	47

a) bimagisches Quadrat

40	3	32	59	42	13	18	53
45	50	21	10	27	8	35	64
58	29	2	37	56	19	16	43
51	48	11	24	5	26	61	34
31	4	39	60	41	54	17	14
22	49	46	9	28	63	36	7
1	30	57	38	55	44	15	20
12	47	52	23	6	33	62	25

b) bimagisches Quadrat

Abb. 11.29: Umwandlungen der semi-bimagischen Quadrate in bimagische Quadrate

Irreguläre bimagische Quadrate

Um weitere bimagische Quadrate zu erzeugen, gibt Coccoz ein Beispiel an, wo er nicht mit zwei der fünf fundamentalen Gruppen arbeitet, sondern jeweils zwei Gruppen für einen Generator kombiniert. Der Generator für die bimagischen Zeilen benutzt Zahlen aus den Gruppen 3 und 4, der Generator für die bimagischen Spalten dagegen die Gruppen 1 und 5.

3	10	24	29	38	47	49	60	4
5	16	18	27	36	41	55	62	4
2	13	19	32	40	43	53	58	3
7	12	22	25	33	46	52	63	3
1	14	20	31	39	44	54	57	3
8	11	21	26	34	45	51	64	3
6	15	17	28	35	42	56	61	4
4	9	23	30	37	48	50	59	4

a) Generator 1 (Gruppen 3 und 4)

1	1	1	1	5	5	5	5
5	1	8	4	11	2	3	10
12	16	9	13	14	7	6	15
19	23	18	22	17	28	25	20
30	26	31	27	24	29	32	21
34	38	35	39	36	41	44	33
47	43	46	42	37	48	45	40
56	52	53	49	58	51	50	59
57	61	60	64	63	54	55	62

b) Generator 2 (Gruppen 1 und 5)

Abb. 11.30: Zwei Generatoren aus den Gruppen 3 und 4 sowie 1 und 5

Mit diesen beiden Generatoren kann beispielsweise das semi-bimagische Quadrat aus Abbildung 11.31 konstruiert werden, wo alle 2 x 2 - Blöcke die Diagonalensummen 65 besitzen.

47	60	49	38	24	29	3	10
5	18	27	16	36	41	55	62
56	35	42	61	17	28	6	15
30	9	4	23	37	48	50	59
19	53	13	43	58	2	32	40
12	46	22	52	63	7	25	33
57	31	39	1	14	54	44	20
34	8	64	26	11	51	45	21

Abb. 11.31: Semi-bimagisches Quadrat

Um dieses semi-bimagische Quadrat in ein bimagisches umzuwandeln, kann man beispielsweise die Diagonalen aus Tabelle 11.11 benutzen.

Diagonale 1	2	16	20	30	35	45	49	63
Diagonale 2	4	14	18	32	33	47	51	61

Tab. 11.11: Bimagische Reihen für die Diagonalen

Vertauscht man die Zeilen und Spalten so, dass diese Zahlen passend auf den Diagonalen angeordnet werden, entsteht beispielsweise das bimagische Quadrat aus Abbildung 11.32.

47	60	49	38	24	29	3	10
5	18	27	16	36	41	55	62
56	35	42	61	17	28	6	15
30	9	4	23	37	48	50	59
19	53	13	43	58	2	32	40
12	46	22	52	63	7	25	33
57	31	39	1	14	54	44	20
34	8	64	26	11	51	45	21

a) semi-bimagisches Quadrat

49	38	10	3	29	24	60	47
27	16	62	55	41	36	18	5
39	1	20	44	54	14	31	57
64	26	21	45	51	11	8	34
13	43	40	32	2	58	53	19
22	52	33	25	7	63	46	12
42	61	15	6	28	17	35	56
4	23	59	50	48	37	9	30

b) bimagisches Quadrat

Abb. 11.32: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 8$ (Coccoz, Beispiel 6)

Ausgehend von diesem bimagischen Quadrat gibt Coccoz weitere Möglichkeiten von Vertauschungen an, die zu weiteren bimagischen Quadraten führen. Besitzen diese Quadrate außer den bekannten Zahlenpaaren wie beispielsweise 33 - 97, 64 - 66 oder 65 - 65 auch völlig neue Kombinationen wie z.B. 57 - 73, nennt er sie irregulär.

11.1.2 Coccoz (algebraisches Muster)

Coccoz hat 1894 ein algebraisches Muster vorgestellt, mit dem sich bimagische Quadrate der Ordnung $n = 8$ erzeugen lassen.[5]

DR	dq	cQ	Bs	Cr	bP	ap	AS
cS	Cp	DP	ar	ds	AQ	Bq	bR
bp	BS	As	dQ	aP	Dr	CR	cq
dP	Ds	CS	bq	cp	BR	Ar	aQ
Aq	aR	br	CP	BQ	cs	dS	Dp
CQ	cr	dR	Ap	Dq	aS	bs	BP
Br	bQ	aq	DS	AR	dp	cP	Cs
as	AP	Bp	cR	bS	Cq	DQ	dr

Abb. 11.33: Algebraisches Muster

Die den Buchstaben zugeordneten Zahlen müssen dabei zwei Bedingungen erfüllen. Zunächst müssen die zueinander gehörenden Groß- und Kleinbuchstaben addiert jeweils die Summe 7 ergeben.

$$A + a = B + b = C + c + D + d = P + p = Q + q = R + r = S + s = 7$$

Zusätzlich müssen noch folgende Gleichheiten gelten:

$$A + D + b + c = a + d + B + C = 14$$
$$P + S + q + r = p + s + Q + R = 14$$

[5] Coccoz [102] S. 173 – 174

Diese Bedingungen lassen sich nur durch die beiden Zahlengruppen $0, 3, 5, 6$ und $1, 2, 4, 7$ realisieren. Mit dieser Wahl lässt sich gleichzeitig auch die bimagische Eigenschaft erzielen, denn diese beiden Zahlengruppen sind für die Zahlen $0, 1, \ldots, 7$ die beiden einzigen Kombinationen, für die sowohl die Summe der Zahlen als auch die Summe der Quadrate gleich ist.

$$0 + 3 + 5 + 6 = 1 + 2 + 4 + 7$$
$$0^2 + 3^2 + 5^2 + 6^2 = 1^2 + 2^2 + 4^2 + 7^2$$

Wählt man beispielsweise die Belegung

Belegung															
a	b	c	d	D	C	B	A	p	q	r	s	S	R	Q	P
6	2	4	0	7	3	5	1	6	7	2	3	4	5	0	1

Abb. 11.34: Mögliche Belegung für ein bimagisches Quadrat

erkennt man, dass die gestellten Bedingungen erfüllt sind. Zunächst sind den zueinander gehörenden Groß- und Kleinbuchstaben immer komplementäre Zahlen bezüglich 7 zugeordnet. Weiterhin werden den 16 Buchstaben auch gültige Zahlen aus den beiden Zahlengruppen zugeordnet.

$$A + D + b + c = a + d + B + C = 14 \qquad 1 + 7 + 2 + 4 = 6 + 0 + 5 + 3 = 14$$
$$P + S + q + r = p + s + Q + R = 14 \qquad 1 + 4 + 7 + 2 = 6 + 3 + 0 + 5 = 14$$

Mit dieser Belegung ergibt sich dann das bimagische Quadrat aus Abbildung 11.35. Wie alle bimagischen Quadrate, die sich mit diesem algebraischen Muster erzeugen lassen, ist auch dieses Quadrat symmetrisch und besitzt trimagische Diagonalen.

62	8	33	44	27	18	55	13
37	31	58	51	4	9	48	22
23	45	12	1	50	59	30	40
2	60	29	24	39	46	11	49
16	54	19	26	41	36	5	63
25	35	6	15	64	53	20	42
43	17	56	61	14	7	34	28
52	10	47	38	21	32	57	3

Abb. 11.35: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 8$ (Coccoz, Beispiel 1)

Insgesamt existieren 320 verschiedene Belegungen für dieses algebraische Muster, mit denen bimagische Quadrate erstellt werden können. Ein weiteres Beispiel ist in Abbildung 11.36 dargestellt.

Belegung															
a	b	c	d	D	C	B	A	p	q	r	s	S	R	Q	P
2	3	0	1	6	7	4	5	2	6	3	7	0	4	1	5

53	15	2	40	60	30	19	41
1	59	54	20	16	42	39	29
27	33	48	10	22	52	61	7
14	56	57	31	3	37	44	18
47	21	28	62	34	8	9	51
58	4	13	43	55	17	32	38
36	26	23	49	45	11	6	64
24	46	35	5	25	63	50	12

Abb. 11.36: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 8$ (Coccoz, Beispiel 2)

11.1.3 Rilly

Rilly hat 1901 eine Methode zur Konstruktion bimagischer Quadrate der Ordnung $n = 8$ vorgestellt.[6] Dabei benutzt er zwei Halbgeneratoren, einen für die oberen vier und einen für die unteren vier Zeilen eines Quadrates. Jede Zeile der Halbgeneratoren besteht aus einer bimagische Reihe und enthält daher vier gerade und vier ungerade Zahlen.

Für die oberen Halbgeneratoren benutzt Rilly

- 16 gerade Zahlen aus den Bereichen 50 bis 64 und 2 bis 16
- 16 ungerade Zahlen aus dem Bereich 17 bis 47

Dabei enthält jede Zeile dieser Halbgeneratoren jeweils zwei Zahlen aus den beiden Bereichen 50 bis 64 und 2 bis 16 sowie vier ungerade Zahlen. Zwei Beispiele dieser Halbgeneratoren sind in Tabelle 11.12 dargestellt. Neben der Kennnummer verwendet Rilly die Kennzeichung s für die oberen Halbgeneratoren (supérieur).

Generator 4s							
64	52	14	2	37	35	31	25
62	50	16	4	45	39	27	17
60	56	10	6	43	33	29	23
58	54	12	8	47	41	21	19

Generator 48s							
64	50	10	8	43	37	29	19
62	52	12	6	47	33	25	23
60	54	14	4	41	39	31	17
58	56	16	2	45	35	27	21

Tab. 11.12: Zwei Halbgeneratoren für die oberen vier Zeilen

Für die unteren Halbgeneratoren verbleiben damit die folgenden 32 Zahlen:

[6] Rilly [475], siehe auch Coccoz [105]

- 16 gerade Zahlen aus dem Bereich 18 bis 48
- 16 ungerade Zahlen aus den Bereichen 1 bis 15 und 49 bis 63

Entsprechend enthält hier jede Zeile jeweils zwei Zahlen aus den beiden Bereichen 49 bis 63 und 1 bis 15 sowie vier gerade Zahlen. Für diese Halbgeneratoren verwendet Rilly neben der Kennnummer die Kennzeichnung i (inférieur).

Generator 6i							
48	38	26	20	61	49	15	3
46	44	24	18	57	53	11	7
42	36	32	22	59	55	9	5
40	34	30	28	63	51	13	1

Generator 18i							
48	34	30	20	59	53	9	7
46	36	32	18	57	55	11	5
44	38	26	24	63	49	13	3
42	40	28	22	61	51	15	1

Tab. 11.13: Zwei Halbgeneratoren für die unteren vier Zeilen

Rilly hat insgesamt 50 obere und 50 untere Halbgeneratoren angegeben, die zu insgesamt 2500 Generatoren der Ordnung $n = 8$ kombiniert werden können. Drei Beispiele sind in Abbildung 11.37 angegeben.

64	50	14	4	45	33	27	23
62	52	16	2	41	37	31	19
60	54	10	8	47	35	25	21
58	56	12	6	43	39	29	17
48	36	26	22	57	55	11	5
46	34	28	24	61	51	15	1
44	40	30	18	59	53	9	7
42	38	32	20	63	49	13	3

a) Generator 7s - 15i

64	50	14	4	43	37	25	23
62	52	16	2	41	39	27	21
60	58	8	6	35	33	31	29
56	54	12	10	47	45	19	17
48	46	20	18	55	53	11	9
44	38	26	24	63	49	13	3
42	40	28	22	61	51	15	1
36	34	32	30	59	57	7	5

b) Generator 12s - 1i

64	50	14	4	43	37	25	23
62	52	16	2	41	39	27	21
60	58	8	6	35	33	31	29
56	54	12	10	47	45	19	17
48	36	26	22	57	55	11	5
46	34	28	24	61	51	15	1
44	40	30	18	59	53	9	7
42	38	32	20	63	49	13	3

c) Generator 12s - 15i

Abb. 11.37: Drei vollständige Generatoren von Rilly

Bei allen Generatoren fällt u.a. auf, dass die zu $n^2 + 1 = 65$ komplementären Zahlen der oberen Hälfte in der unteren Hälfte liegen und umgekehrt.

Aus einem Generator wird ein semi-bimagisches Quadrat erzeugt, indem die Zahlen innerhalb der Zeilen so vertauscht werden, dass auch die Spalten bimagisch werden. Um die Anzahl der Möglichkeiten einzuschränken, werden zunächst die acht Zahlen aus den linken beiden Spalten des oberen Halbgenerators innerhalb der Zeilen auf die oberen Diagonalenhälften getauscht.

64	50	14	4	43	37	25	23
62	52	16	2	41	39	27	21
60	58	8	6	35	33	31	29
56	54	12	10	47	45	19	17
48	46	20	18	55	53	11	9
44	38	26	24	63	49	13	3
42	40	28	22	61	51	15	1
36	34	32	30	59	57	7	5

a) Generator 12s - 1i

64	23	14	4	43	37	25	50
27	62	16	2	41	39	52	21
8	33	60	6	35	58	31	29
10	47	12	56	54	45	19	17
48	46	20	18	55	53	11	9
44	38	26	24	63	49	13	3
42	40	28	22	61	51	15	1
36	34	32	30	59	57	7	5

b) Basiszahlen auf den Diagonalen

Abb. 11.38: Anordnung der Basiszahlen für den Generator 12s - 1i

Für diese acht Basiszahlen werden dann unter allen 38 039 bimagischen Reihen diejenigen gesucht, deren Zahlen unabhängig von der Position in allen acht Zeilen des Quadrates vorkommen. Eine Liste mit allen bimagischen Reihen für die auf den Diagonalenhälften liegenden Basiszahlen 64, 62, 60, 56, 54, 58, 52 und 50 ist in Tabelle 11.14 gegeben. In dieser Tabelle wird in der rechten Spalte auch angegeben, welche dieser Reihen für die ersten beiden aufgeführten Beispiele benutzt werden.

Die linke Spalte enthält mit 64 eine der acht Basiszahlen, für deren Spalte fünf bimagische Reihen zur Auswahl stehen. In diesem Beispiel wird die Reihe mit den Zahlen

64 57 38 35 21 20 15 10

gewählt, die nur noch umgeordnet werden müssen. Dies ist kein Problem, da diese Reihen so ausgesucht worden sind, dass ihre Zahlen in den Quadratzeilen irgendwo vorhanden sind.

Man erkennt im Generator, dass die Zahlen 64 und 10 bereits in der linken Spalte vorhanden sind. In den anderen sechs Zeilen werden in jeder Zeile jeweils zwei Zahlen so vertauscht, dass die Zahlen der gewählten Reihe in der linken Spalte vertreten sind. Dazu müssen die Zahlenpaare 21 und 27, 35 und 8, 20 und 48, 38 und 44, 15 und 42 sowie 57 und 36 so vertauscht werden, wie es in Abbildung 11.39a zu erkennen ist. Mit diesen Vertauschungen entspricht die linke Spalte der gewählten Reihe und ist damit bimagisch.

Für die zweite Spalte mit der bereits vorgegebenen Basiszahl 62 stehen sogar acht bimagische Reihen zur Auswahl. In diesem Beispiel ist die Reihe mit den Zahlen

62 59 40 33 23 18 13 12

ausgewählt worden, da mit 23, 33, 40 und 62 bereits vier Zahlen in dieser Spalte vorhanden sind. Jetzt müssen nur noch die Zahlenpaare 12 und 47, 18 und 46, 13 und 44 sowie 59 und 34 vertauscht werden, damit wie in Abbildung 11.39b alle Zahlen der gewählten bimagischen Reihe in der zweiten Spalte vertreten sind.

Entsprechend verfährt man mit den weiteren Spalten. In Tabelle 11.14 ist angegeben, welche der möglichen bimagischen Reihen für das erste Beispiel gewählt worden ist. Allerdings führt nicht jede Kombination der zur Auswahl stehenden Reihen zu einem semi-bimagischen Quadrat. Eine geeignete Kombination kann man wie Rilly nur durch Probieren finden.

Basiszahl	bimagische Reihe								Beispiel
64	64	57	38	35	21	20	15	10	1
	64	53	41	36	26	19	15	6	
	64	51	45	34	26	21	11	8	
	64	51	41	38	29	18	12	7	2
	64	49	40	39	33	18	10	7	
62	62	61	34	33	24	23	12	11	
	62	59	40	33	23	18	13	12	1
	62	59	40	31	25	20	13	10	
	62	55	43	34	28	17	13	8	
	62	53	43	30	29	28	12	3	
	62	53	37	36	35	22	12	3	
	62	49	47	36	28	23	9	6	
	62	49	43	40	31	20	10	5	2
60	61	60	39	34	24	17	14	11	1
	61	60	39	32	26	19	14	9	
	60	59	40	39	18	17	14	13	
	60	55	45	34	25	22	16	3	2
	60	55	41	38	30	17	15	4	
	60	49	45	40	30	23	11	2	
56	61	56	44	33	27	18	14	7	
	59	56	46	33	26	21	15	4	2
	59	56	42	37	29	18	16	3	
	57	56	48	31	26	25	15	2	
	56	51	46	39	33	26	5	4	
	56	49	46	43	29	28	7	2	1
54	63	54	42	35	25	20	16	5	
	61	54	44	30	29	27	11	4	
	61	54	38	36	35	21	11	4	
	57	54	48	35	28	23	13	2	2
	57	54	44	39	31	20	14	1	
	54	53	42	41	32	31	4	3	
	54	51	48	41	31	26	5	4	1
58	63	58	37	36	22	19	16	9	1
	58	55	47	32	26	25	16	1	
	58	53	47	36	27	24	14	1	2
	58	53	43	40	32	19	13	2	
	58	51	47	38	32	21	9	4	
52	63	52	46	33	25	22	12	7	
	63	52	42	37	30	17	11	8	2
	57	52	48	37	31	22	10	3	
	55	52	45	40	34	25	6	3	
	53	52	47	42	32	25	6	3	1
	52	51	48	47	26	25	6	5	
50	63	50	40	39	34	17	9	8	
	61	50	48	35	27	24	10	5	
	61	50	44	39	32	19	9	6	2
	59	50	46	39	29	24	12	1	
	55	50	45	44	30	27	8	1	1

Tab. 11.14: Mögliche bimagische Reihen für die Spalten

64	23	14	4	43	37	25	50
21	62	16	2	41	39	52	27
35	33	60	6	8	58	31	29
10	47	12	56	54	45	19	17
20	46	48	18	55	53	11	9
38	44	26	24	63	49	13	3
15	40	28	22	61	51	42	1
57	34	32	30	59	36	7	5

a) Spalte 1

64	23	14	4	43	37	25	50
21	62	16	2	41	39	52	27
35	33	60	6	8	58	31	29
10	12	47	56	54	45	19	17
20	18	48	46	55	53	11	9
38	13	26	24	63	49	44	3
15	40	28	22	61	51	42	1
57	59	32	30	34	36	7	5

b) Spalte 2

64	23	14	4	43	37	25	50
21	62	39	2	41	16	52	27
35	33	60	6	8	58	31	29
10	12	17	56	54	45	19	47
20	18	11	46	55	53	48	9
38	13	24	26	63	49	44	3
15	40	61	22	28	51	42	1
57	59	34	30	32	36	7	5

c) Spalte 3

64	23	14	43	4	37	25	50
21	62	39	2	41	16	52	27
35	33	60	29	8	58	31	6
10	12	17	56	54	45	19	47
20	18	11	46	55	53	48	9
38	13	24	49	63	26	44	3
15	40	61	28	22	51	42	1
57	59	34	7	32	36	30	5

d) Spalte 4

64	23	14	43	4	37	25	50
21	62	39	2	41	16	52	27
35	33	60	29	31	58	8	6
10	12	17	56	54	45	19	47
20	18	11	46	48	53	55	9
38	13	24	49	26	63	44	3
15	40	61	28	51	22	42	1
57	59	34	7	5	36	30	32

e) Spalte 5

64	23	14	43	4	37	25	50
21	62	39	2	41	16	52	27
35	33	60	29	31	58	8	6
10	12	17	56	54	19	45	47
20	18	11	46	48	9	55	53
38	13	24	49	26	63	44	3
15	40	61	28	51	22	42	1
57	59	34	7	5	36	30	32

f) Spalte 6

Abb. 11.39: Konstruktion eines semi-bimagischen Quadrates aus dem Generator 12s - 1i

In diesem Beispiel ist die Auswahl allerdings erfolgreich und nach Anordnung der Zahlen in Spalte 7 ergeben die verbliebenen Zahlen in Spalte 8 automatisch eine bimagische Reihe.

64	23	14	43	4	37	25	50
21	62	39	2	41	16	52	27
35	33	60	29	31	58	6	8
10	12	17	56	54	19	47	45
20	18	11	46	48	9	53	55
38	13	24	49	26	63	3	44
15	40	61	28	51	22	42	1
57	59	34	7	5	36	32	30

a) Spalten 7 und 8

Abb. 11.40: Semi-bimagisches Quadrat aus dem Generator 12s-1i

Dieses semi-bimagische Quadrat muss jetzt noch in ein bimagisches umgewandelt werden. Dazu müssen unter den 38 039 bimagischen Reihen zwei passende gefunden werden, um durch das Vertauschen von Zeilen und Spalten ein bimagisches Quadrat zu erzeugen. Dazu kann man beispielsweise die beiden bimagischen Reihen aus Tabelle 11.15 benutzen.

Diagonale 1	2	9	24	31	40	47	50	57
Diagonale 2	5	14	19	28	35	44	53	62

Tab. 11.15: Bimagische Reihen für die Diagonalen

Wie man in Abbildung 11.41a erkennt, ist in jeder Zeile und Spalte des semi-bimagischen Quadrates jeweils eine Zahl der beiden für die Diagonalen vorgesehenen magischen Reihen vorhanden. Deshalb kann man die Zeilen und Spalten so vertauschen, dass die entsprechenden Zahlen wie im bimagischen Quadrat der Abbildung 11.41b auf den Diagonalen liegen.

64	23	14	43	4	37	25	50
21	62	39	2	41	16	52	27
35	33	60	29	31	58	6	8
10	12	17	56	54	19	47	45
20	18	11	46	48	9	53	55
38	13	24	49	26	63	3	44
15	40	61	28	51	22	42	1
57	59	34	7	5	36	32	30

a) semi-bimagisches Quadrat

50	43	4	25	37	64	23	14
27	2	41	52	16	21	62	39
8	29	31	6	58	35	33	60
45	56	54	47	19	10	12	17
55	46	48	53	9	20	18	11
30	7	5	32	36	57	59	34
1	28	51	42	22	15	40	61
44	49	26	3	63	38	13	24

b) bimagisches Quadrat

Abb. 11.41: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 8$ (Rilly, Beispiel 1)

Beispiel 2

Ein zweites Beispiel geht ebenfalls vom Generator 12s - 1i aus, wobei allerdings andere bimagische Reihen für die Spalten ausgewählt werden. Die hier benutzten Reihen sind in Tabelle 11.14 besonders markiert.

Damit ergeben sich völlig andere Vertauschungen und damit auch ein anderes semi-bimagisches Quadrat, dessen Konstruktion in Abbildung 11.42 detailliert dargestellt ist.

64	50	14	4	43	37	25	23
62	52	16	2	41	39	27	21
60	58	8	6	35	33	31	29
56	54	12	10	47	45	19	17
48	46	20	18	55	53	11	9
44	38	26	24	63	49	13	3
42	40	28	22	61	51	15	1
36	34	32	30	59	57	7	5

a) Generator 12s - 1i

64	23	14	4	43	37	25	50
27	62	16	2	41	39	52	21
8	33	60	6	35	58	31	29
10	47	12	56	54	45	19	17
48	46	20	18	55	53	11	9
44	38	26	24	63	49	13	3
42	40	28	22	61	51	15	1
36	34	32	30	59	57	7	5

b) Basiszahlen auf den Diagonalen

64	23	14	4	43	37	25	50
41	62	16	2	27	39	52	21
29	33	60	6	35	58	31	8
12	47	10	56	54	45	19	17
18	46	20	48	55	53	11	9
38	44	26	24	63	49	13	3
51	40	28	22	61	42	15	1
7	34	32	30	59	57	36	5

c) Spalte 1

64	43	14	4	23	37	25	50
41	62	16	2	27	39	52	21
29	31	60	6	35	58	33	8
12	10	47	56	54	45	19	17
18	20	46	48	55	53	11	9
38	49	26	24	63	44	13	3
51	40	28	22	61	42	15	1
7	5	32	30	59	57	36	34

d) Spalte 2

64	43	25	4	23	37	14	50
41	62	16	2	27	39	52	21
29	31	60	6	35	58	33	8
12	10	45	56	54	47	19	17
18	20	55	48	46	53	11	9
38	49	3	24	63	44	13	26
51	40	22	28	61	42	15	1
7	5	34	30	59	57	36	32

e) Spalte 3

64	43	25	4	23	37	14	50
41	62	16	21	27	39	52	2
29	31	60	33	35	58	6	8
12	10	45	56	54	47	19	17
18	20	55	46	48	53	11	9
38	49	3	26	63	44	13	24
51	40	22	15	61	42	28	1
7	5	34	59	30	57	36	32

f) Spalte 4

64	43	25	4	23	37	14	50
41	62	16	21	2	39	52	27
29	31	60	33	35	58	6	8
12	10	45	56	54	47	19	17
18	20	55	46	48	53	11	9
38	49	3	26	13	44	63	24
51	40	22	15	28	42	61	1
7	5	34	59	57	30	36	32

g) Spalte 5

64	43	25	4	23	14	37	50
41	62	16	21	2	27	52	39
29	31	60	33	35	58	6	8
12	10	45	56	54	47	19	17
18	20	55	46	48	53	11	9
38	49	3	26	13	24	63	44
51	40	22	15	28	1	61	42
7	5	34	59	57	36	30	32

h) Spalte 6

64	43	25	4	23	14	37	50
41	62	16	21	2	27	52	39
29	31	60	33	35	58	8	6
12	10	45	56	54	47	17	19
18	20	55	46	48	53	11	9
38	49	3	26	13	24	63	44
51	40	22	15	28	1	42	61
7	5	34	59	57	36	30	32

i) Spalten 7 und 8

Abb. 11.42: Zweites semi-bimagisches Quadrat aus dem Generator 12s - 1i

Wie im ersten Beispiel werden anschließend wieder zwei bimagische Reihen ausgesucht, die für die Diagonalen genutzt werden können.

Diagonale 1	11	12	23	24	33	34	61	62
Diagonale 2	13	14	17	18	39	40	59	60

In Abbildung 11.43a ist zu erkennen, dass die Zahlen dieser beiden Reihen wieder auf alle Zeilen und Spalten des semi-bimagischen Quadrates verteilt sind. Deshalb kann man die Zeilen und Spalten des semi-bimagischen Quadrates so vertauschen, dass die entsprechenden Zahlen auf den Diagonalen liegen und das bimagische Quadrat aus Abbildung 11.43b entsteht.

64	43	25	4	23	14	37	50
41	62	16	21	2	27	52	39
29	31	60	33	35	58	8	6
12	10	45	56	54	47	17	19
18	20	55	46	48	53	11	9
38	49	3	26	13	24	63	44
51	40	22	15	28	1	42	61
7	5	34	59	57	36	30	32

a) semi-bimagisches Quadrat

23	43	4	64	37	25	50	14
2	62	21	41	52	16	39	27
35	31	33	29	8	60	6	58
54	10	56	12	17	45	19	47
48	20	46	18	11	55	9	53
57	5	59	7	30	34	32	36
28	40	15	51	42	22	61	1
13	49	26	38	63	3	44	24

b) bimagisches Quadrat

Abb. 11.43: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 8$ (Rilly, Beispiel 2)

Beispiel 3

Mit einem dritten Beispiel soll gezeigt werden, dass nicht nur die bisherigen Zahlen aus der linken oberen Ecke als Basiszahl dienen können. Man kann auch jede andere Gruppe von acht Zahlen wählen, wenn sie in verschiedenen Spalten liegen. In diesem Beispiel werden einfach die Zahlen der oberen Zeile als Basiszahlen gewählt, so dass man beispielsweise das semi-bimagische Quadrat aus Abbildung 11.45a erhält.

64	50	14	4	43	37	25	23
62	52	16	2	41	39	27	21
60	58	8	6	35	33	31	29
56	54	12	10	47	45	19	17
48	46	20	18	55	53	11	9
44	38	26	24	63	49	13	3
42	40	28	22	61	51	15	1
36	34	32	30	59	57	7	5

a) Generator 12s - 1i

64	50	14	4	43	37	25	23
21	27	39	41	2	16	52	62
35	8	60	31	58	29	33	6
10	45	17	54	19	56	12	47
20	55	11	48	53	18	46	9
38	44	24	26	13	3	63	49
15	1	61	51	40	42	22	28
57	30	34	5	32	59	7	36

b) semi-bimagisches Quadrat

Abb. 11.44: Umwandlung des Generators in ein semi-bimagisches Quadrat

Jetzt sucht man wieder bimagischen Reihen für die Diagonalen, was aber nicht immer gewährleistet ist.

Diagonale 1	1	12	21	34	37	48	49	58
Diagonale 2	7	16	17	28	31	44	53	64

Für dieses Beispiel existieren aber zwei passende bimagische Reihen, so dass nach dem Vertauschen von Zeilen und Spalten wieder ein bimagisches Quadrat entsteht.

64	50	14	4	43	37	25	23
21	27	39	41	2	16	52	62
35	8	60	31	58	29	33	6
10	45	17	54	19	56	12	47
20	55	11	48	53	18	46	9
38	44	24	26	13	3	63	49
15	1	61	51	40	42	22	28
57	30	34	5	32	59	7	36

a) semi-bimagisches Quadrat

37	14	43	50	23	4	25	64
59	34	32	30	36	5	7	57
29	60	58	8	6	31	33	35
42	61	40	1	28	51	22	15
3	24	13	44	49	26	63	38
18	11	53	55	9	48	46	20
56	17	19	45	47	54	12	10
16	39	2	27	62	41	52	21

b) bimagisches Quadrat

Abb. 11.45: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 8$ (Rilly, Beispiel 3)

Von den 2500 Generatoren, die Rilly per Hand erstellt hat, erzeugen 80 semi-bimagische Quadrate. Aber nur 48 dieser Generatoren erzeugen auch semi-bimagische Quadrate, die dann durch geeignete Diagonalen auch zu bimagischen Quadraten führen.

Da sich semi-bimagische Quadrate ganz allgemein durch Permutation von Zeilen und Spalten leicht verändern lassen, lässt sich nicht so einfach erkennen, ob es sich prinzipiell um Quadrate mit gleicher Struktur handelt. Deswegen ist eine normierte Darstellung hier sehr hilfreich. Dazu vertauscht man die Zeilen und Spalten so, dass

- sich die Zahl 1 in der linken oberen Ecke befindet
- die Zahlen der oberen Zeile von links nach rechts aufsteigend angeordnet sind
- die Zahlen der linken Spalte von oben nach unten aufsteigend angeordnet sind

Insgesamt können mit der Methode von Rilly 2920 unterschiedliche semi-bimagische Quadrate erzeugt werde. Aber nur 477 von ihnen führen dann auch zu den 2543 unterschiedlichen bimagischen Quadraten, die man mit diesem Verfahren konstruieren kann. Eine genauere Untersuchung dieser Methode mit weiteren Ergebnissen findet sich in einem Artikel von Gaspalou.[7]

Aus jedem dieser normierten bimagischen Quadrate lassen sich dann durch Vertauschungen 1536 weitere bimagische Quadrate erzeugen.[8]

Variante

Gaspalou hat die Idee der Halbgeneratoren von Rilly aufgegriffen, teilt ihnen aber andere Zahlenbereiche zu.[9] Die bimagischen Reihen des oberen Halbgenerators müssen jeweils 2 Zahlen aus den Zahlenbereichen von 1 bis 8, 25 bis 32, 41 bis 48 sowie 49 bis 56 enthalten. Da die unteren Halbgeneratoren immer die zu $n^2 + 1 = 65$ komplementären Zahlen enthalten, müssen in deren bimagischen Reihen jeweils 2 Zahlen aus den Bereichen 9 bis 16, 17 bis 24, 33 bis 40 sowie 57 bis 64 vertreten sein.

[7] Gaspalou [156]

[8] siehe Kapitel 11.1.14 zur Normierung von bimagischen Quadraten

[9] Gaspalou [154]

54	51	47	42	29	28	8	1
53	52	48	41	30	27	7	2
56	49	45	44	31	26	6	3
55	50	46	43	32	25	5	4
60	59	38	37	24	23	10	9
63	58	40	33	21	20	14	11
64	57	39	34	22	19	13	12
62	61	36	35	18	17	16	15

a) Generator

54	51	47	42	29	28	8	1
41	48	52	53	2	7	27	30
31	26	6	3	56	49	45	44
4	5	25	32	43	46	50	55
23	59	60	24	37	9	10	38
33	40	14	11	58	63	21	20
12	13	39	34	19	22	64	57
62	18	17	61	16	36	35	15

b) semi-bimagisches Quadrat

Abb. 11.46: Umwandlung des Generators in ein semi-bimagisches Quadrat

Wenn man aus dem Generator ein semi-bimagisches Quadrat erstellt hat, werden wieder zwei bimagische Reihen für die Diagonalen benötigt.

Diagonale 1	1	16	24	26	39	41	50	63
Diagonale 2	7	10	18	32	33	47	56	57

Nach dem Vertauschen von Zeilen und Spalten kann dann auch mit diesen Zahlenmengen wie in diesem Beispiel wieder ein bimagisches Quadrat erstellt werden.

54	51	47	42	29	28	8	1
41	48	52	53	2	7	27	30
31	26	6	3	56	49	45	44
4	5	25	32	43	46	50	55
23	59	60	24	37	9	10	38
33	40	14	11	58	63	21	20
12	13	39	34	19	22	64	57
62	18	17	61	16	36	35	15

a) semi-bimagisches Quadrat

1	54	51	8	42	29	28	47
30	41	48	27	53	2	7	52
44	31	26	45	3	56	49	6
55	4	5	50	32	43	46	25
38	23	59	10	24	37	9	60
15	62	18	35	61	16	36	17
20	33	40	21	11	58	63	14
57	12	13	64	34	19	22	39

b) bimagisches Quadrat

Abb. 11.47: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 8$ (Rilly, Variante 1)

Mit diesen beiden Zahlenmengen der Halbgeneratoren lassen sich insgesamt 2212 unterschiedliche bimagische Quadrate erzeugen, die von den 2543 Quadraten verschieden sind, die mit den Generatoren von Rilly erzeugt werden. Aus jedem dieser normierten bimagischen Quadrate lassen sich dann durch Vertauschungen 1536 weitere bimagische Quadrate erzeugen.

Man kann die Rolle der beiden Halbgeneratoren auch vertauschen, wie es in 11.48 geschehen ist. Allerdings werden dadurch keine weiteren unterschiedlichen bimagischen Quadrate erzeugt.

64	57	39	34	21	20	14	11
63	58	40	33	22	19	13	12
62	59	37	36	23	18	16	9
61	60	38	35	24	17	15	10
56	49	47	42	29	28	6	3
55	50	48	41	30	27	5	4
54	51	45	44	31	26	8	1
53	52	46	43	32	25	7	2

a) Generator

64	57	39	34	21	20	14	11
13	19	22	12	40	58	63	33
18	37	9	62	59	16	36	23
35	15	60	24	10	38	17	61
42	56	49	47	3	29	28	6
27	30	4	5	50	55	41	48
8	44	31	51	45	1	54	26
53	2	46	25	32	43	7	52

b) semi-bimagisches Quadrat

57	20	14	64	39	21	11	34
19	58	63	13	22	40	33	12
37	16	36	18	9	59	23	62
15	38	17	35	60	10	61	24
44	1	54	8	31	45	26	51
2	43	7	53	46	32	52	25
56	29	28	42	49	3	6	47
30	55	41	27	4	50	48	5

c) bimagisches Quadrat

Abb. 11.48: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 8$ (Rilly, Variante 2)

11.1.4 Tarry

Gaston Tarry stellte 1903 ein algebraisches Muster vor, mit dem sich pandiagonale bimagische Quadrate erzeugen lassen.[10]

a $p+r$	$b-c$ $q-r+s$	$b+d$ p	$a+c+d$ $q+s$	b $p+r+s$	$a+c$ $q-r$	$a+d$ $p+s$	$b-c+d$ q
b p	$a+c$ $q+s$	$a+d$ $p+r$	$b-c+d$ $q-r+s$	a $p+s$	$b-c$ q	$b+d$ $p+r+s$	$a+c+d$ $q-r$
$a+c+d$ $p+r+s$	$b+d$ $q-r$	$b-c$ $p+s$	a q	$b-c+d$ $p+r$	$a+d$ $q-r+s$	$a+c$ p	b $q+s$
$b-c+d$ $p+s$	$a+d$ q	$a+c$ $p+r+s$	b $q-r$	$a+c+d$ p	$b+d$ $q+s$	$b-c$ $p+r$	a $q-r+s$
$a+d$ $q-r$	$b-c+d$ $p+r+s$	b q	$a+c$ $p+s$	$b+d$ $q-r+s$	$a+c+d$ $p+r$	a $q+s$	$b-c$ p
$b+d$ q	$a+c+d$ $p+s$	a $q-r$	$b-c$ $p+r+s$	$a+d$ $q+s$	$b-c+d$ p	b $q-r+s$	$a+c$ $p+r$
$a+c$ $q-r+s$	b $p+r$	$b-c+d$ $q+s$	$a+d$ p	$b-c$ $q-r$	a $p+r+s$	$a+c+d$ q	$b+d$ $p+s$
$b-c$ $q+s$	a p	$a+c+d$ $q-r+s$	$b+d$ $p+r$	$a+c$ q	b $p+s$	$b-c+d$ $q-r$	$a+d$ $p+r+s$

Abb. 11.49: Algebraisches Muster von Tarry

Abbildung 11.49 zeigt jeweils in den oberen Zeilen das Muster für das erste und in den unteren Zeilen das Muster für das zweite Hilfsquadrat. Wählt man etwa die Belegung

[10] Tarry [538]

a	b	c	d		p	q	r	s
2	3	2	4		3	5	4	1

erhält man die beiden Hilfsquadrate aus Abbildung 11.50.

2	1	7	8	3	4	6	5
3	4	6	5	2	1	7	8
8	7	1	2	5	6	4	3
5	6	4	3	8	7	1	2
6	5	3	4	7	8	2	1
7	8	2	1	6	5	3	4
4	3	5	6	1	2	8	7
1	2	8	7	4	3	5	6

a) Hilfsquadrat 1: a b c d

7	2	3	6	8	1	4	5
3	6	7	2	4	5	8	1
8	1	4	5	7	2	3	6
4	5	8	1	3	6	7	2
1	8	5	4	2	7	6	3
5	4	1	8	6	3	2	7
2	7	6	3	1	8	5	4
6	3	2	7	5	4	1	8

b) Hilfsquadrat 2: p q r s

Abb. 11.50: Zwei Hilfsquadrate aus dem algebraischen Muster von Tarry

Da es sich bei diesen beiden Hilfsquadraten um diagonale Euler-Quadrate handelt, lässt sich hieraus leicht ein magisches Quadrat erzeugen. Dazu wählt man beispielsweise das zweite Hilfsquadrat, dekrementiert alle Zahlen und multipliziert sie dann mit der Ordnung des Quadrates, also 8. Wenn man hierzu die Zahlen aus dem ersten Hilfsquadrat hinzuaddiert, entsteht das pandiagonale bimagische Quadrat mit trimagischen Diagonalen aus Abbildung 11.51.

50	9	23	48	59	4	30	37
19	44	54	13	26	33	63	8
64	7	25	34	53	14	20	43
29	38	60	3	24	47	49	10
6	61	35	28	15	56	42	17
39	32	2	57	46	21	11	52
12	51	45	22	1	58	40	31
41	18	16	55	36	27	5	62

Abb. 11.51: Pandiagonales bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 8$ (Tarry)

Bouteloup hat dieses algebraische Muster näher untersucht[11] und festgestellt, dass pandiagonale bimagische Quadrate entstehen, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

$$r \cdot (a - b) = c \cdot (p - q)$$

Insgesamt existieren 320 geeignete Kombinationen der acht Parameter, mit denen sich 320 unterschiedliche pandiagonale bimagische Quadrate erzeugen lassen. Eine genauere Untersuchung zeigt aber dann,

[11] Bouteloup [50] S. 151 – 154

dass nur 80 von ihnen wirklich verschieden sind und die restlichen sich durch Spiegelungen oder Drehungen aus ihnen erzeugen lassen.

Es lassen sich weitere bimagische Quadrate erzeugen, wenn man die Bedeutung der beiden Hilfsquadrate umkehrt. Dazu sei dieses Mal eine Belegung gewählt, die auch negative Parameter enthält.

a	b	c	d	p	q	r	s
3	5	−2	1	7	6	1	−4

Mit dieser Belegung erhält man die beiden Hilfsquadrate aus Abbildung 11.52.

3	7	6	2	5	1	4	8
5	1	4	8	3	7	6	2
2	6	7	3	8	4	1	5
8	4	1	5	2	6	7	3
4	8	5	1	6	2	3	7
6	2	3	7	4	8	5	1
1	5	8	4	7	3	2	6
7	3	2	6	1	5	8	4

a) Hilfsquadrat 1: a b c d

8	1	7	2	4	5	3	6
7	2	8	1	3	6	4	5
4	5	3	6	8	1	7	2
3	6	4	5	7	2	8	1
5	4	6	3	1	8	2	7
6	3	5	4	2	7	1	8
1	8	2	7	5	4	6	3
2	7	1	8	6	3	5	4

b) Hilfsquadrat 2: p q r s

Abb. 11.52: Zwei Hilfsquadrate

Bei diesem veränderten Vorgehen wird jetzt das erste Hilfsquadrat gewählt, dessen Zahlen dekrementiert und dann noch mit 8 multipliziert werden. Wenn man hierzu jetzt die Werte des zweiten Hilfsquadrates hinzuaddiert, entsteht das pandiagonale bimagische Quadrat mit trimagischen Diagonalen aus Abbildung 11.53.

24	49	47	10	36	5	27	62
39	2	32	57	19	54	44	13
12	45	51	22	64	25	7	34
59	30	4	37	15	42	56	17
29	60	38	3	41	16	18	55
46	11	21	52	26	63	33	8
1	40	58	31	53	20	14	43
50	23	9	48	6	35	61	28

Abb. 11.53: Pandiagonales bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 8$ (Tarry, Variante)

Auch diese Variante liefert 320 unterschiedliche Quadrate, von denen 80 wirklich verschieden sind. Diese 80 bimagischen Quadrate sind aber unterschiedlich von den 80 Quadraten, die mit dem zuerst beschriebenen Verfahren erzeugt wurden. Damit lassen sich mit dem algebraischen Muster von Tarry insgesamt 160 unterschiedliche pandiagonale bimagische Quadrate mit trimagischen Diagonalen erzeugen.

Algebraische Muster

Ein Jahr später stellte Tarry insgesamt 10 algebraische Muster vor, die bei geeigneten Belegungen diagonale Euler-Quadrate erzeugen, aus denen dann pandiagonale bimagische Quadrate erzeugt werden können.[12] In Abbildung 11.54 ist beispielsweise das Muster dargestellt, welches Tarry als Muster 1 bezeichnet.

$b - c + d$ $cp - r(a-b)$	$a + c$ $cp + cr$	$b + d$ $cp + cs$	a $cp - r(a-b+c) + cs$	$a + c + d$ $cp - r(a-b) + cs$	$b - c$ $cp + cr + cs$	$a + d$ cp	b $cp - r(a-b+c)$
a $cp - r(a-b) + cs$	$b + d$ $cp + cr + cs$	$a + c$ cp	$b - c + d$ $cp - r(a-b+c)$	b $cp - r(a-b)$	$a + d$ $cp + cr$	$b - c$ $cp + cs$	$a + c + d$ $cp - r(a-b+c) + cs$
$a + c + d$ $cp + cr$	$b - c$ $cp - r(a-b)$	$a + d$ $cp - r(a-b+c) + cs$	b $cp + cs$	$b - c + d$ $cp + cr + cs$	$a + c$ $cp - r(a-b) + cs$	$b + d$ $cp - r(a-b+c)$	a cp
b $cp + cr + cs$	$a + d$ $cp - r(a-b) + cs$	$b - c$ $cp - r(a-b+c)$	$a + c + d$ cp	a $cp + cr$	$b + d$ $cp - r(a-b)$	$a + c$ $cp - r(a-b+c) + cs$	$b - c + d$ $cp + cs$
$b - c$ cp	$a + c + d$ $cp - r(a-b+c)$	b $cp - r(a-b) + cs$	$a + d$ $cp + cr + cs$	$a + c$ $cp + cs$	$b - c + d$ $cp - r(a-b+c) + cs$	a $cp - r(a-b)$	$b + d$ $cp + cr$
$a + d$ $cp + cs$	b $cp - r(a-b+c) + cs$	$a + c + d$ $cp - r(a-b)$	$b - c$ $cp + cr$	$b + d$ cp	a $cp - r(a-b+c)$	$b - c + d$ $cp - r(a-b) + cs$	$a + c$ $cp + cr + cs$
$a + c$ $cp - r(a-b+c)$	$b - c + d$ cp	a $cp + cr + cs$	$b + d$ $cp - r(a-b) + cs$	$b - c$ $cp - r(a-b+c) + cs$	$a + c + d$ $cp + cs$	b $cp + cr$	$a + d$ $cp - r(a-b)$
$b + d$ $cp - r(a-b+c) + cs$	a $cp + cs$	$b - c + d$ $cp + cr$	$a + c$ $cp - r(a-b)$	$a + d$ $cp - r(a-b+c)$	b cp	$a + c + d$ $cp + cr + cs$	$b - c$ $cp - r(a-b) + cs$

Abb. 11.54: Algebraisches Muster von Tarry (Muster 1)

Diese Muster sind etwas komplizierter aufgebaut und erzeugen teilweise auch andere Zwischenergebnisse. Mit der Belegung

a	b	c	d		p	r	s
2	5	4	2		2	8	4

ergeben sich aus diesem algebraischen Muster die diagonalen Euler-Quadrate aus Abbildung 11.55.

3	6	7	2	8	1	4	5
2	7	6	3	5	4	1	8
8	1	4	5	3	6	7	2
5	4	1	8	2	7	6	3
1	8	5	4	6	3	2	7
4	5	8	1	7	2	3	6
6	3	2	7	1	8	5	4
7	2	3	6	4	5	8	1

a) Hilfsquadrat 1: a b c d

32	40	24	16	48	56	8	0
48	56	8	0	32	40	24	16
40	32	16	24	56	48	0	8
56	48	0	8	40	32	16	24
8	0	48	56	24	16	32	40
24	16	32	40	8	0	48	56
0	8	56	48	16	24	40	32
16	24	40	32	0	8	56	48

b) Hilfsquadrat 2: p r s

Abb. 11.55: Diagonale Eulersche Hilfsquadrate

12 Tarry [539]

Während das erste Hilfsquadrate unverändert aufgebaut ist, erkennt man beim zweiten Hilfsquadrat, dass es nur aus den Vielfachen von 8 aufgebaut ist, also $0, 8, 16, \ldots, 56$. Damit müssen diese beiden Hilfsquadrate nur noch addiert werden und es entsteht das pandiagonale bimagische Quadrat mit trimagischen Diagonalen aus Abbildung 11.56.

35	46	31	18	56	57	12	5
50	63	14	3	37	44	25	24
48	33	20	29	59	54	7	10
61	52	1	16	42	39	22	27
9	8	53	60	30	19	34	47
28	21	40	41	15	2	51	62
6	11	58	55	17	32	45	36
23	26	43	38	4	13	64	49

Abb. 11.56: Pandiagonales bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 8$ (Tarry, Muster 1)

Mit einem zweiten Beispiel wird demonstriert, dass auch negative Parameter zu einem bimagischen Quadrat führen können.

a	b	c	d	p	r	s
5	3	−4	1	−10	−4	8

Mit dieser Belegung ergeben sich die diagonalen Euler-Quadrate aus Abbildung 11.57.

8	1	4	5	2	7	6	3
5	4	1	8	3	6	7	2
2	7	6	3	8	1	4	5
3	6	7	2	5	4	1	8
7	2	3	6	1	8	5	4
6	3	2	7	4	5	8	1
1	8	5	4	7	2	3	6
4	5	8	1	6	3	2	7

a) Hilfsquadrat 1: a b c d

48	56	8	0	16	24	40	32
16	24	40	32	48	56	8	0
56	48	0	8	24	16	32	40
24	16	32	40	56	48	0	8
40	32	16	24	8	0	48	56
8	0	48	56	40	32	16	24
32	40	24	16	0	8	56	48
0	8	56	48	32	40	24	16

b) Hilfsquadrat 2: p r s

Abb. 11.57: Diagonale Eulersche Hilfsquadrate

Durch Addition der beiden Hilfsquadrate ergibt sich dann das pandiagonale bimagische Quadrat mit trimagischen Diagonalen aus Abbildung 11.58.

56	57	12	5	18	31	46	35
21	28	41	40	51	62	15	2
58	55	6	11	32	17	36	45
27	22	39	42	61	52	1	16
47	34	19	30	9	8	53	60
14	3	50	63	44	37	24	25
33	48	29	20	7	10	59	54
4	13	64	49	38	43	26	23

Abb. 11.58: Pandiagonales bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 8$ (Tarry, Muster 1)

Unterschiedliche Belegungen führen mit diesem algebraischen Muster zu insgesamt 320 pandiagonalen bimagischen Quadraten, von denen aber nur 80 wirklich verschieden sind.

Dieses Vorgehen lässt sich auf die weiteren Muster 2 bis 10 übertragen, die in den Abbildungen 11.59 bis 11.61 dargestellt sind.

Allerdings weichen die Muster 7 und 8 etwas von den anderen Mustern ab, da die Parameter p, q, r und s für die Berechnung der Hilfsquadrates mit den Zahlen 1 bis 8 benutzt werden. Die Parameter a, b und c werden bei diesen beiden Mustern in Verbindung mit den anderen Parametern zur Berechnung des Hilfsquadrates mit den Zahlen $0, 8, 16, \ldots, 56$ verwendet. Ein Beispiel soll die Benutzung des abgeänderten Musters 7 verdeutlichen.

a	b	c	p	q	r	s
4	14	2	4	6	4	-1

Mit dieser Belegung werden die diagonalen Euler-Quadrate aus Abbildung 11.62 berechnet.

40	56	16	0	24	8	32	48
24	8	32	48	40	56	16	0
0	16	56	40	48	32	8	24
48	32	8	24	0	16	56	40
32	48	24	8	16	0	40	56
16	0	40	56	32	48	24	8
8	24	48	32	56	40	0	16
56	40	0	16	8	24	48	32

a) Hilfsquadrat 1: a b c

8	1	4	5	7	2	3	6
4	5	8	1	3	6	7	2
7	2	3	6	8	1	4	5
3	6	7	2	4	5	8	1
2	7	6	3	1	8	5	4
6	3	2	7	5	4	1	8
1	8	5	4	2	7	6	3
5	4	1	8	6	3	2	7

b) Hilfsquadrat 2: p q r s

Abb. 11.62: Diagonale Eulersche Hilfsquadrate

Addiert ergeben die beiden Hilfsquadrate wieder ein pandiagonales bimagisches Quadrat mit trimagischen Diagonalen.

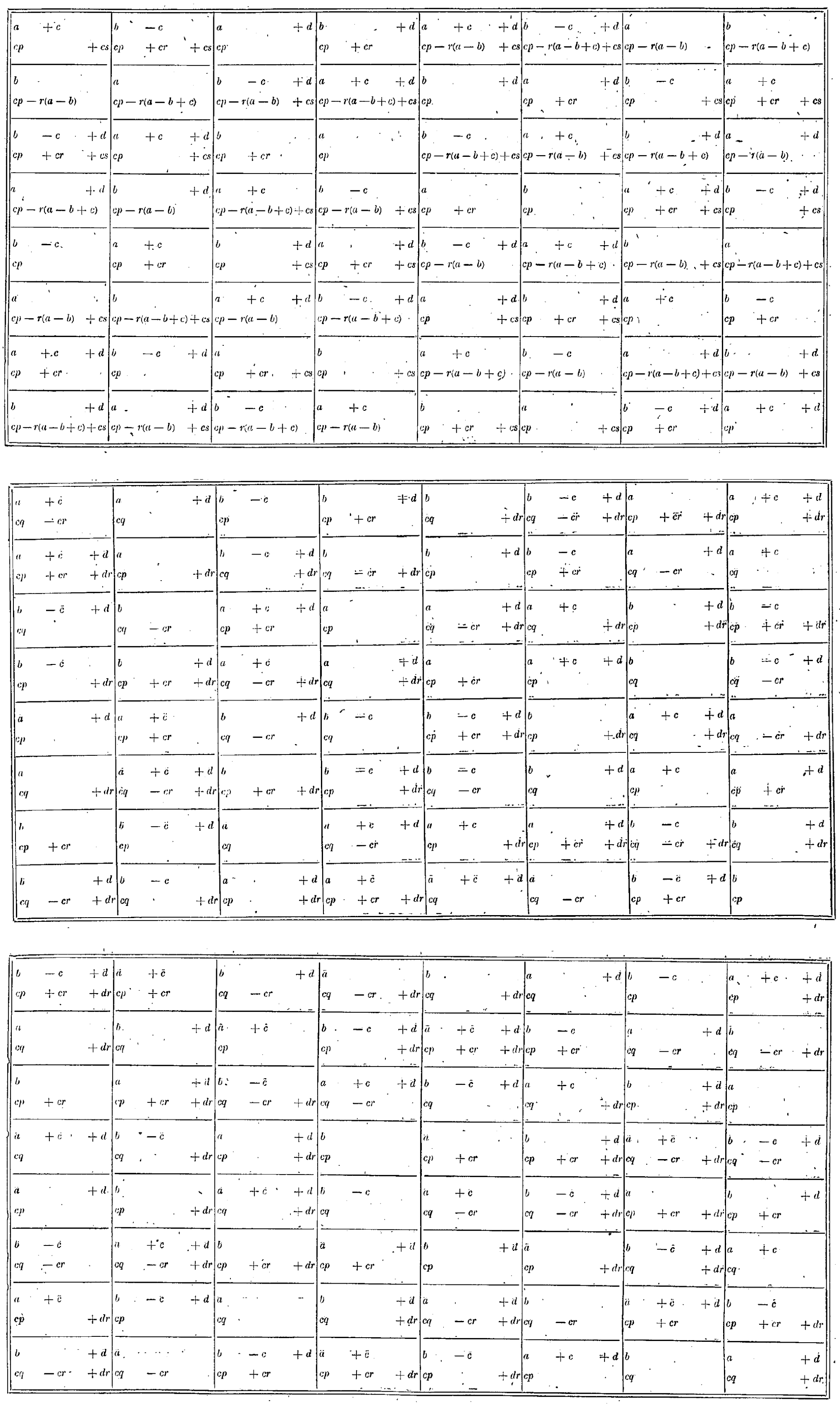


Abb. 11.59: Algebraische Muster 2 – 4

a +c cq (a−b+c)(p−q+r)	b −c +d cq	a cp	b +d cp (a−b+c)(p−q+r)	a +c +d cp +cr	b −c cp +cr (a−b+c)(p−q+r)	a +d cq −cr (a−b+c)(p−q+r)	b cq −cr
a cp +cr	b +d cp +cr (a−b+c)(p−q+r)	a +c cq −cr (a−b+c)(p−q+r)	b −c +d cq −cr	a +d cq (a−b+c)(p−q+r)	b cq	a +c +d cp	b −c cp (a−b+c)(p−q+r)
a +c +d cp (a−b+c)(p−q+r)	b −c cp	a +d cq	b cq (a−b+c)(p−q+r)	a +c cq −cr	b −c +d cq −cr (a−b+c)(p−q+r)	a cp +cr (a−b+c)(p−q+r)	b +d cp +cr
a +d cq −cr	b cq −cr (a−b+c)(p−q+r)	a +c +d cp +cr (a−b+c)(p−q+r)	b −c cp +cr	a cp (a−b+c)(p−q+r)	b +d cp	a +c cq	b −c +d cq (a−b+c)(p−q+r)
b −c cq −cr (a−b+c)(p−q+r)	a +c +d cq −cr	b cp +cr	a +d cp +cr (a−b+c)(p−q+r)	b −c +d cp	a +c cp (a−b+c)(p−q+r)	b +d cq (a−b+c)(p−q+r)	a cq
b cp	a +d cp (a−b+c)(p−q+r)	b −c cq (a−b+c)(p−q+r)	a +c +d cq	b +d cq −cr (a−b+c)(p−q+r)	a cq −cr	b −c +d cp +cr	a +c cp +cr (a−b+c)(p−q+r)
b −c +d cp +cr (a−b+c)(p−q+r)	a +c cp +cr	b +d cq −cr	a cq −cr (a−b+c)(p−q+r)	b −c cq	a +c +d cq (a−b+c)(p−q+r)	b cp (a−b+c)(p−q+r)	a +d cp
b +d cq	a cq (a−b+c)(p−q+r)	b −c +d cp (a−b+c)(p−q+r)	a +c cp	b cp +cr (a−b+c)(p−q+r)	a +d cp +cr	b −c cq −cr	a +c +d cq −cr (a−b+c)(p−q+r)

a +c cq (a−b+c)(p−q+r)	a +c +d cq −cr	b cp +cr	b +d cp (a−b+c)(p−q+r)	b −c cq −cr (a−b+c)(p−q+r)	b −c +d cq	a cp	a +d cp +cr (a−b+c)(p−q+r)
b cp	b +d cp +cr (a−b+c)(p−q+r)	a +c cq −cr (a−b+c)(p−q+r)	a +c +d cq	a cp +cr	a +d cp (a−b+c)(p−q+r)	b −c cq (a−b+c)(p−q+r)	b −c +d cq −cr
b −c +d cp +cr (a−b+c)(p−q+r)	b −c cp	a +d cq	a cq −cr (a−b+c)(p−q+r)	a +c +d cp (a−b+c)(p−q+r)	a +c cp +cr	b +d cq −cr	b cq (a−b+c)(p−q+r)
a +d cq −cr	a cq (a−b+c)(p−q+r)	b −c +d cp (a−b+c)(p−q+r)	b −c cp +cr	b +d cq	b cq −cr (a−b+c)(p−q+r)	a +c +d cp +cr (a−b+c)(p−q+r)	a +c cp
a +c +d cp +cr	a +c cp (a−b+c)(p−q+r)	b +d cq (a−b+c)(p−q+r)	b cq −cr	b −c +d cp	b −c cp +cr (a−b+c)(p−q+r)	a +d cq −cr (a−b+c)(p−q+r)	a cq
b +d cq −cr (a−b+c)(p−q+r)	b cq	a +c +d cp	a +c cp +cr (a−b+c)(p−q+r)	a +d cq (a−b+c)(p−q+r)	a cq −cr	b −c +d cp +cr	b −c cp (a−b+c)(p−q+r)
b −c cq	b −c +d cq −cr (a−b+c)(p−q+r)	a cp +cr (a−b+c)(p−q+r)	a +d cp	a +c cq −cr	a +c +d cq (a−b+c)(p−q+r)	b cp (a−b+c)(p−q+r)	b +d cp +cr
a cp (a−b+c)(p−q+r)	a +d cp +cr	b −c cq −cr	b −c +d cq (a−b+c)(p−q+r)	b cp +cr (a−b+c)(p−q+r)	b +d cp	a +c cq	a +c +d cq −cr (a−b+c)(p−q+r)

br (a−b+c)(p−q+r) p +r	br q −r +s	ar p	ar (a−b+c)(p−q+r) q +s	ar +cr p +r +s	ar +cr (a−b+c)(p−q+r) q −r	br −cr (a−b+c)(p−q+r) p +s	br −cr q
ar +cr p	ar +cr (a−b+c)(p−q+r) q +s	br −cr (a−b+c)(p−q+r) p +r	br −cr q −r +s	br (a−b+c)(p−q+r) p +s	br q	ar p +r +s	ar (a−b+c)(p−q+r) q −r
ar (a−b+c)(p−q+r) p +r +s	ar q −r	br p +s	br (a−b+c)(p−q+r) q	br −cr p +r	br −cr (a−b+c)(p−q+r) q −r +s	ar +cr (a−b+c)(p−q+r) p	ar +cr q +s
br −cr p +s	br −cr (a−b+c)(p−q+r) q	ar +cr (a−b+c)(p−q+r) p +r +s	ar +cr q −r	ar (a−b+c)(p−q+r) p	ar q +s	br p +r	br (a−b+c)(p−q+r) q −r +s
br −cr (a−b+c)(p−q+r) q −r	br −cr p +r +s	ar +cr q	ar +cr (a−b+c)(p−q+r) p +s	ar q −r +s	ar (a−b+c)(p−q+r) p +r	br (a−b+c)(p−q+r) q +s	br p
ar q	ar (a−b+c)(p−q+r) p +s	br (a−b+c)(p−q+r) q −r	br p +r +s	br −cr (a−b+c)(p−q+r) q +s	br −cr p	ar +cr q −r +s	ar +cr (a−b+c)(p−q+r) p +r
ar +cr (a−b+c)(p−q+r) q −r +s	ar +cr p +r	br −cr q +s	br −cr (a−b+c)(p−q+r) p	br q −r	br (a−b+c)(p−q+r) p +r +s	ar (a−b+c)(p−q+r) q	ar p +s
br q +s	br (a−b+c)(p−q+r) p	ar (a−b+c)(p−q+r) q −r +s	ar p +r	ar +cr (a−b+c)(p−q+r) q	ar +cr p +s	br −cr q −r	br −cr (a−b+c)(p−q+r) p +r +s

Abb. 11.60: Algebraische Muster 5 – 7

br $(a-b+c)(p-q+r)$ $p + r$	$br - cr$ $p + r + s$	$ar + cr$ q	ar $(a-b+c)(p-q+r)$ $q + s$	$br - cr$ $(a-b+c)(p-q+r)$ $q - r$	br $q - r + s$	ar p	$ar + cr$ $(a-b+c)(p-q+r)$ $p + s$
ar q	$ar + cr$ $(a-b+c)(p-q+r)$ $q + s$	$br - cr$ $(a-b+c)(p-q+r)$ $p + r$	br $p + r + s$	$ar + cr$ p	ar $(a-b+c)(p-q+r)$ $p + s$	br $(a-b+c)(p-q+r)$ $q - r$	$br - cr$ $q - r + s$
$ar + cr$ $(a-b+c)(p-q+r)$ $q - r + s$	ar $q - r$	br $p + s$	$br - cr$ $(a-b+c)(p-q+r)$ p	ar $(a-b+c)(p-q+r)$ $p + r + s$	$ar + cr$ $p + r$	$br - cr$ $q + s$	br $(a-b+c)(p-q+r)$ q
$br - cr$ $p + s$	br $(a-b+c)(p-q+r)$ p	ar $(a-b+c)(p-q+r)$ $q - r + s$	$ar + cr$ $q - r$	br $q +$	$br - cr$ $(a-b+c)(p-q+r)$ q	$ar + cr$ $(a-b+c)(p-q+r)$ $p + r + s$	ar $p + r$
$ar + cr$ $p + r + s$	ar $(a-b+c)(p-q+r)$ $p + r$	br $(a-b+c)(p-q+r)$ $q + s$	$br - cr$ q	ar $q - r + s$	$ar + cr$ $(a-b+c)(p-q+r)$ $q - r$	$br - cr$ $(a-b+c)(p-q+r)$ $p + s$	br p
$br - cr$ $(a-b+c)(p-q+r)$ $q + s$	br q	ar $p + r + s$	$ar + cr$ $(a-b+c)(p-q+r)$ $p + r$	br $(a-b+c)(p-q+r)$ $p + s$	$br - cr$ p	$ar + cr$ $q - r + s$	ar $(a-b+c)(p-q+r)$ $q - r$
br $q - r$	$br - cr$ $(a-b+c)(p-q+r)$ $q - r + s$	$ar + cr$ $(a-b+c)(p-q+r)$ p	ar $p + s$	$br - cr$ $p + r$	br $(a-b+c)(p-q+r)$ $p + r + s$	ar $(a-b+c)(p-q+r)$ q	$ar + cr$ $q + s$
ar $(a-b+c)(p-q+r)$ p	$ar + cr$ $p + s$	$br - cr$ $q - r$	br $(a-b+c)(p-q+r)$ $q - r + s$	$ar + cr$ $(a-b+c)(p-q+r)$ q	ar $q + s$	br $p + r$	$br - cr$ $(a-b+c)(p-q+r)$ $p + r + s$

$b - c$ $(a-b+c)q$ $d(p-q+r)$	b $(a-b+c)(q-r)$	$b - c + d$ $(a-b+c)(p+r)$	$b + d$ $(a-b+c)p$ $d(p-q+r)$	$a + d$ $(a-b+c)(q-r)$ $d(p-q+r)$	$a + c + d$ $(a-b+c)q$	a $(a-b+c)p$	$a + c$ $(a-b+c)(p+r)$ $d(p-q+r)$
$b - c + d$ $(a-b+c)p$	$b + d$ $(a-b+c)(p+r)$ $d(p-q+r)$	$b - c$ $(a-b+c)(q-r)$ $d(p-q+r)$	b $(a-b+c)q$	a $(a-b+c)(p+r)$	$a + c$ $(a-b+c)p$ $d(p-q+r)$	$a + d$ $(a-b+c)q$ $d(p-q+r)$	$a + c + d$ $(a-b+c)(q-r)$
$a + c + d$ $(a-b+c)(p+r)$ $d(p-q+r)$	$a + d$ $(a-b+c)p$	$a + c$ $(a-b+c)q$	a $(a-b+c)(q-r)$ $d(p-q+r)$	b $(a-b+c)p$ $d(p-q+r)$	$b - c$ $(a-b+c)(p+r)$	$b + d$ $(a-b+c)(q-r)$	$b - c + d$ $(a-b+c)q$ $d(p-q+r)$
$a + c$ $(a-b+c)(q-r)$	a $(a-b+c)q$ $d(p-q+r)$	$a + c + d$ $(a-b+c)p$ $d(p-q+r)$	$a + d$ $(a-b+c)(p+r)$	$b + d$ $(a-b+c)q$	$b - c + d$ $(a-b+c)(q-r)$ $d(p-q+r)$	b $(a-b+c)(p+r)$ $d(p-q+r)$	$b - c$ $(a-b+c)p$
b $(a-b+c)(p+r)$	$b - c$ $(a-b+c)p$ $d(p-q+r)$	$b + d$ $(a-b+c)q$ $d(p-q+r)$	$b - c + d$ $(a-b+c)(q-r)$	$a + c + d$ $(a-b+c)p$	$a - d$ $(a-b+c)(p+r)$ $d(p-q+r)$	$a + c$ $(a-b+c)(q-r)$ $d(p-q+r)$	a $(a-b+c)q$
$b + d$ $(a-b+c)(q-r)$ $d(p-q+r)$	$b - c + d$ $(a-b+c)q$	b $(a-b+c)p$	$b - c$ $(a-b+c)(p+r)$ $d(p-q+r)$	$a + c$ $(a-b+c)q$ $d(p-q+r)$	a $(a-b+c)(q-r)$	$a + c + d$ $(a-b+c)(p+r)$	$a + d$ $(a-b+c)p$ $d(p-q+r)$
$a + d$ $(a-b+c)q$	$a + c + d$ $(a-b+c)(q-r)$ $d(p-q+r)$	a $(a-b+c)(p+r)$ $d(p-q+r)$	$a + c$ $(a-b+c)p$	$b - c$ $(a-b+c)(q-r)$	b $(a-b+c)q$ $d(p-q+r)$	$b - c + d$ $(a-b+c)p$ $d(p-q+r)$	$b + d$ $(a-b+c)(p+r)$
a $(a-b+c)p$ $d(p-q+r)$	$a + c$ $(a-b+c)(p+r)$	$a + d$ $(a-b+c)(q-r)$	$a + c + d$ $(a-b+c)q$ $d(p-q+r)$	$b - c + d$ $(a-b+c)(p+r)$ $d(p-q+r)$	$b + d$ $(a-b+c)p$	$b - c$ $(a-b+c)q$	b $(a-b+c)(q-r)$ $d(p-q+r)$

$b - c$ $(a-b+c)q$ $d(p-q+r)$	$a + c + d$ $(a-b+c)q$	a $(a-b+c)p$	$b + d$ $(a-b+c)p$ $d(p-q+r)$	b $(a-b+c)(p+r)$	$a + d$ $(a-b+c)(p+r)$ $d(p-q+r)$	$a + c$ $(a-b+c)(q-r)$ $d(p-q+r)$	$b - c + d$ $(a-b+c)(q-r)$
a $(a-b+c)(p+r)$	$b + d$ $(a-b+c)(p+r)$ $d(p-q+r)$	$b - c$ $(a-b+c)(q-r)$ $d(p-q+r)$	$a + c + d$ $(a-b+c)(q-r)$	$a + c$ $(a-b+c)q$ $d(p-q+r)$	$b - c + d$ $(a-b+c)q$	b $(a-b+c)p$	$a + d$ $(a-b+c)p$ $d(p-q+r)$
b $(a-b+c)p$ $d(p-q+r)$	$a + d$ $(a-b+c)p$	$a + c$ $(a-b+c)q$	$b - c + d$ $(a-b+c)q$ $d(p-q+r)$	$b - c$ $(a-b+c)(q-r)$	$a + c + d$ $(a-b+c)(q-r)$ $d(p-q+r)$	a $(a-b+c)(p+r)$ $d(p-q+r)$	$b + d$ $(a-b+c)(p+r)$
$a + c$ $(a-b+c)(q-r)$	$b - c + d$ $(a-b+c)(q-r)$ $d(p-q+r)$	b $(a-b+c)(p+r)$ $d(p-q+r)$	$a + d$ $(a-b+c)(p+r)$	a $(a-b+c)p$ $d(p-q+r)$	$b + d$ $(a-b+c)p$	$b - c$ $(a-b+c)q$	$a + c + d$ $(a-b+c)q$ $d(p-q+r)$
$a + d$ $(a-b+c)(q-r)$ $d(p-q+r)$	b $(a-b+c)(q-r)$	$b - c + d$ $(a-b+c)(p+r)$	$a + c$ $(a-b+c)(p+r)$ $d(p-q+r)$	$a + c + d$ $(a-b+c)p$	$b - c$ $(a-b+c)p$ $d(p-q+r)$	$b + d$ $(a-b+c)q$ $d(p-q+r)$	a $(a-b+c)q$
$b - c + d$ $(a-b+c)p$	$a + c$ $(a-b+c)p$ $d(p-q+r)$	$a + d$ $(a-b+c)q$ $d(p-q+r)$	b $(a-b+c)q$	$b + d$ $(a-b+c)(q-r)$ $d(p-q+r)$	a $(a-b+c)(q-r)$	$a + c + d$ $(a-b+c)(p+r)$	$b - c$ $(a-b+c)(p+r)$ $d(p-q+r)$
$a + c + d$ $(a-b+c)(p+r)$ $d(p-q+r)$	$b - c$ $(a-b+c)(p+r)$	$b + d$ $(a-b+c)(q-r)$	a $(a-b+c)(q-r)$ $d(p-q+r)$	$a + d$ $(a-b+c)q$	b $(a-b+c)q$ $d(p-q+r)$	$b - c + d$ $(a-b+c)p$ $d(p-q+r)$	$a + c$ $(a-b+c)p$
$b + d$ $(a-b+c)q$	a $(a-b+c)q$ $d(p-q+r)$	$a + c + d$ $(a-b+c)p$ $d(p-q+r)$	$b - c$ $(a-b+c)p$	$b - c + d$ $(a-b+c)(p+r)$ $d(p-q+r)$	$a + c$ $(a-b+c)(p+r)$	$a + d$ $(a-b+c)(q-r)$	b $(a-b+c)(q-r)$ $d(p-q+r)$

Abb. 11.61: Algebraische Muster 8 – 10

48	57	20	5	31	10	35	54
28	13	40	49	43	62	23	2
7	18	59	46	56	33	12	29
51	38	15	26	4	21	64	41
34	55	30	11	17	8	45	60
22	3	42	63	37	52	25	16
9	32	53	36	58	47	6	19
61	44	1	24	14	27	50	39

Abb. 11.63: Pandiagonales bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 8$ (Tarry, Muster 7)

Insgesamt erzeugt jedes dieser zehn algebraischen Muster 320 unterschiedliche bimagische Quadrate, von denen allerdings immer nur 80 wirklich verschieden sind. Die anderen Quadrate lassen sich durch Spiegelungen und Drehungen aus diesen 80 Quadraten erzeugen.

Weiterhin erzeugen die verschiedenen Muster nicht immer unterschiedliche Quadrate. So erzeugen die Muster 1 und 4 ebenso die gleichen 80 Quadrate wie die Muster 2 und 3. Mit den Mustern 5, 7 und 10 und 6, 8 und 9 gibt es sogar zwei Gruppen von jeweils 3 Mustern, mit denen die gleichen 80 bimagischen Quadrate erzeugt werden.

Insgesamt bedeutet dies, dass von den 3200 Quadraten, die mit diesen 10 Mustern erzeugt werden können, nur 320 wirklich verschieden sind. Diese 320 bimagischen Quadrate können auch mit den Mustern 1, 2, 5 und 6 erzeugt werden.

Mit den Mustern 2 und 3 lassen sich auch die bimagischen Quadrate des Tarry-Musters aus dem Jahre 1903 erzeugen. Die bimagischen Quadrate der Variante dieses Musters stimmen mit den Quadraten der Muster 5, 7 und 10 überein.

11.1.5 Portier

Portier erweiterte den von Tarry geprägten Begriff der *cabalistischen Quadrate* und stellt folgende Bedingungen an derartige Quadrate. Ein cabalistisches Quadrat der Ordnung $n = 8$

- ist pandiagonal
- ist bimagisch
- besitzt trimagische Diagonalen
- lässt sich in 8 Blöcke aufteilen, deren Zahlen die magische Summe 260 und die bimagische Summe 11 180 ergeben

Um derartige Quadrate zu konstruieren, benutzt Portier drei Hilfsquadrate und vier trimagische Reihen. Bei der Beschreibung seines Verfahrens stellt er 30 Hilfsquadrate vor, die alle bimagische Spalten besitzen.[13] Seine Hilfsquadrate 9 und 14 sind in Abbildung 11.64 dargestellt.

[13] Portier [454]

A	B	C	D	E	F	G	H
1	2	3	4	5	6	7	8
15	16	13	14	11	12	9	10
22	21	24	23	18	17	20	19
28	27	26	25	32	31	30	29
36	35	34	33	40	39	38	37
46	45	48	47	42	41	44	43
55	56	53	54	51	52	49	50
57	58	59	60	61	62	63	64

a) Hilfsquadrat 9

a	b	c	d	e	f	g	h
1	2	3	4	5	6	7	8
14	13	16	15	10	9	12	11
20	19	18	17	24	23	22	21
31	32	29	30	27	28	25	26
40	39	38	37	36	35	34	33
43	44	41	42	47	48	45	46
53	54	55	56	49	50	51	52
58	57	60	59	62	61	64	63

b) Hilfsquadrat 14

Abb. 11.64: Zwei der 30 Hilfsquadrate von Portier

Als drittes Hilfsquadrat wird hier die Nummer 7 aus seiner Auflistung benutzt, welches dazu dient, acht bimagische Blöcke zu erstellen.

1	2	3	4	5	6	7	8
15	16	13	14	11	12	9	10
20	19	18	17	24	23	22	21
30	29	32	31	26	25	28	27
38	37	40	39	34	33	36	35
44	43	42	41	48	47	46	45
55	56	53	54	51	52	49	50
57	58	59	60	61	62	63	64

Abb. 11.65: Hilfsquadrat 7 für die Gestaltung der acht bimagischen Blöcke

Von den 121 trimagischen Reihen mit 8 Zahlen haben genau 81 die Eigenschaft, dass die beiden symmetrisch liegenden Zahlen komplementär sind, also 65 ergeben. Dies kann man bei den in diesem Beispiel benutzten Reihen deutlich an der dritten und vierten Reihe erkennen, deren Zahlen noch der Größe nach absteigend geordnet sind. Dies gilt auch für die ersten beiden Reihen, jedoch sind die beiden Reihen hier zusätzlich noch beliebig permutiert worden.

Jeweils vier trimagische Reihen bilden das Grundgerüst für die Konstruktion, da sie auf vier Diagonalen verteilt werden, die in den beiden oberen Quadranten beginnen.

48	36	11	58	29	17	7	54
37	51	14	28	24	41	2	63
59	55	45	33	32	20	10	6
62	50	44	40	25	21	15	3

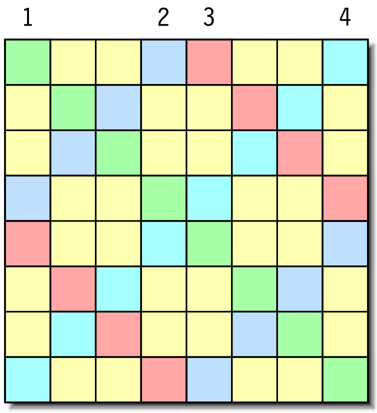


Abb. 11.66: Trimagische Reihen und deren zugeordnete Diagonalen

In dem hier dargestellten Beispiel sind die gleichen Hilfsquadrate und trimagischen Reihen wie im Originalartikel von Portier gewählt worden. Allerdings wird damit ein anderes Quadrat erzeugt, um zu demonstrieren, dass man damit unterschiedliche cabalistische Quadrate konstruieren kann.

Der erste Schritt der Konstruktion ist gleich der komplizierteste. Man sucht zwei Zahlen aus einer trimagischen Reihe, die in verschiedenen Spalten des ersten Hilfsquadrates liegen. Dazu werden zwei weitere Zahlen aus einer anderen trimagischen Reihe benötigt, die in den gleichen Spalten liegen. Im Beispiel werden die Zahlen 48 und 11 aus der ersten trimagische Reihe und 24 bzw. 51 aus der zweiten Reihe gewählt. Diese vier Zahlen liegen wie gewünscht paarweise in den Spalten C und E des ersten Hilfsquadrates. Zusätzlich müssen diese vier Zahlen in unterschiedlichen Spalten des zweiten Hilfsquadrates liegen und auch noch in einer gemeinsamen Spalte des dritten Hilfsquadrates, damit die Summeneigenschaften der acht Blöcke erfüllt werden können.

Diese vier Zahlen können nun so in die Teildiagonalen des linken oberen Quadranten eingetragen werden, dass die aus der gleichen trimagischen Reihe stammenden Zahlen sich auf der gleichen Teildiagonalen und zusätzlich die aus den gleichen Spalten des ersten Hilfsquadrates stammenden Zahlen sich in der gleichen Spalte des Quadranten befinden. Die Spalten dieses Quadrates werden mit den Spaltennamen des ersten Hilfsquadrates gekennzeichnet, die Zeilen mit den Spaltennamen des zweiten Hilfsquadrates. Durch diese Wahl ist sichergestellt, dass das entstehende Quadrat zumindest schon einmal semi-bimagisch sein wird.

Mit den vier gewählten Zahlen stehen damit vier Anordnungen für den linken oberen Quadranten zur Verfügung.

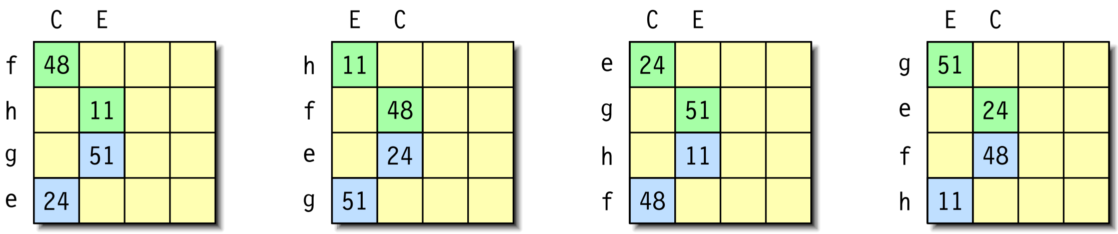


Abb. 11.67: Mögliche Anordnungen für den linken oberen Quadranten

Hat man die ersten vier Zahlen platziert, sind allerdings die noch freien Plätze auf den beiden Teildiagonalen zu vergeben. Entscheidet man sich etwa für die Zahlen aus dem linken Quadrat der Abbildung 11.67, muss die dritte Zahl auf der Diagonalen 1 gleichzeitig in der ersten trimagischen Reihe und der Spalte g des zweiten Hilfsquadrates vorhanden sein. Dies ist damit die Zahl 7. Und auf dem letzten freien Platz dieser Teildiagonalen kann nur die Zahl 36 platziert werden, da diese in der entsprechenden trimagischen Reihe und der Spalte e des zweiten Hilfsquadrates vorhanden ist. Entsprechend sind die weiteren freien Plätze auf der anderen Diagonalen und danach auch die restlichen acht freien Plätze eindeutig bestimmt.

	C	E	G	A				
f	48			28				
h		11	63					
g		51	7					
e	24			36				

	C	E	G	A				
f	48	61	9	28				
h	26	11	63	46				
g	34	51	7	22				
e	24	5	49	36				

Abb. 11.68: Zahlen im linken oberen Quadranten

Die Zahlen auf den Diagonalen 3 und 4 müssen jetzt mit jeweils einer Zahl aus den beiden verbliebenen trimagischen Reihen kombiniert werden. Hier gibt es mit den Zahlen 6 und 50 jedoch zwei Möglichkeiten, da sie in beiden trimagischen Reihen und der bereits festgelegten Spalte f des zweiten Hilfsquadrates vorhanden sind.

Im Beispiel wird jetzt 50 als Startzahl für die Diagonale 3 und 6 als Startzahl für die Diagonale 4 festgelegt. Mit dieser Wahl sind dann die jeweils verbleibenden drei Zeilen für die Diagonalen durch die bereits vergebenden Zeilennamen ebenso eindeutig wie die restlichen verbleibenden Zahlen des rechten oberen Quadranten bestimmt.

	C	E	G	A	H	B	D	F
f	48	61	9	28	50	35	23	6
h	26	11	63	46	8	21	33	52
g	34	51	7	22	64	45	25	12
e	24	5	49	36	10	27	47	62

	C	E	G	A	H	B	D	F
f	48	61	9	28	50	35	23	6
h	26	11	63	46	8	21	33	52
g	34	51	7	22	64	45	25	12
e	24	5	49	36	10	27	47	62
c	3	18	38	55	29	16	60	41
a	53	40	20	1	43	58	14	31
b	13	32	44	57	19	2	54	39
d	59	42	30	15	37	56	4	17

Abb. 11.69: Mit Zahlen gefülltes Quadrat

Ebenso sind alle Zahlen in der unteren Hälfte inzwischen eindeutig festgelegt. Das Ergebnis ist im rechten Quadrat der Abbildung 11.69 zu sehen. Allerdings muss das Ergebnis, wie in diesem Beispiel, durch die weiter oben getroffenen Wahl nicht unbedingt pandiagonal sein, was aber nicht vorhergesagt werden kann. In einem solchen Fall muss bei der Wahl die zweite Möglichkeit für für Startplätze der Diagonalen 3 und 4 getroffen werden und die restlichen Zahlen dann noch einmal neu eingetragen werden.

Alternativ kann man bei einem nicht pandiagonalen Ergebnis auch die Zahlen aus dem rechten oberen Quadranten an einer vertikalen Mittelachse spiegeln, die Zahlen des linken unteren Quadranten an der horizontalen Mittelachse und die Zahlen des rechten unteren Quadranten an beiden Achsen. Danach ist das entstehende Quadrat aus Abbildung 11.70 pandiagonal, bimagisch und besitzt trimagische Diagonalen. Zusätzlich kann man es in acht Rechtecke aufteilen, deren Zahlen addiert jeweils 260 und die Quadrate dieser Zahlen jeweils die bimagische Summe 11 180 ergeben. Diese Eigenschaft ist im rechten Quadrat der Abbildung 11.70 noch einmal besonders herausgehoben.

	C	E	G	A	F	D	B	H
f	48	61	9	28	6	23	35	50
h	26	11	63	46	52	33	21	8
g	34	51	7	22	12	25	45	64
e	24	5	49	36	62	47	27	10
d	59	42	30	15	17	4	56	37
b	13	32	44	57	39	54	2	19
a	53	40	20	1	31	14	58	43
c	3	18	38	55	41	60	16	29

	C	E	G	A	F	D	B	H
f	48	61	9	28	6	23	35	50
h	26	11	63	46	52	33	21	8
g	34	51	7	22	12	25	45	64
e	24	5	49	36	62	47	27	10
d	59	42	30	15	17	4	56	37
b	13	32	44	57	39	54	2	19
a	53	40	20	1	31	14	58	43
c	3	18	38	55	41	60	16	29

Abb. 11.70: Cabalistisches magisches Quadrat der Ordnung $n = 8$ (Portier)

Portier gibt insgesamt 7 Kombinationen mit jeweils vier trimagischen Reihen an, für die er jeweils acht Paare von jeweils zwei Hilfsquadraten anführt. Zusätzlich gibt es für das dritte Hilfsquadrat bei jeder der angeführten Kombination vier weitere Möglichkeiten. Für die hier vorgestellte Kombination der Hilfsquadrate 9 und 14 stehen als drittes Hilfsquadrat beispielsweise die Quadrate 7, 8, 15 und 17 zur Auswahl.

Da bei jeder dieser Kombinationen insgesamt 8 unterschiedliche Quadrate auftreten, kann man mit dieser Methode insgesamt

$$7 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 8 = 1792$$

unterschiedliche cabalistische Quadrate konstruieren.

Beispiel 2

In einem zweiten Beispiel werden die Hilfsquadrate 5, 27 und 3 von Portier benutzt.

A	B	C	D	E	F	G	H
1	2	3	4	5	6	7	8
16	15	14	13	12	11	10	9
23	24	21	22	19	20	17	18
26	25	28	27	30	29	32	31
36	35	34	33	40	39	38	37
45	46	47	48	41	42	43	44
54	53	56	55	50	49	52	51
59	60	57	58	63	64	61	62

a) Hilfsquadrat 5

a	b	c	d	e	f	g	h
1	2	3	4	9	10	11	12
8	7	6	5	16	15	14	13
27	28	25	26	19	20	17	18
30	29	32	31	22	21	24	23
42	41	44	43	34	33	36	35
47	48	45	46	39	40	37	38
52	51	50	49	60	59	58	57
53	54	55	56	61	62	63	64

b) Hilfsquadrat 27

1	2	3	4	5	6	7	8
16	15	14	13	12	11	10	9
22	21	24	23	18	17	20	19
27	28	25	26	31	32	29	30
36	35	34	33	40	39	38	37
45	46	47	48	41	42	43	44
55	56	53	54	51	52	49	50
58	57	60	59	62	61	64	63

c) Hilfsquadrat 3

Abb. 11.71: Drei der 30 Hilfsquadrate von Portier

Zusätzlich werden die trimagischen Reihen aus Tabelle 11.16 verwendet, die auf die Diagonalen verteilt werden.

21	63	49	16	2	44	27	38
56	35	9	20	7	30	58	45
41	26	24	3	62	13	52	39
59	53	6	34	48	17	12	31

Tab. 11.16: Trimagische Reihen

In diesem Beispiel wird mit den Zahlen 21 und 2 der oberen trimagischen Reihe begonnen, die in verschiedenen Spalten des ersten Hilfsquadrates liegen. Weiterhin werden die Zahlen 56 und 35 gewählt, die in der zweiten trimagischen Reihe, aber den gleichen Spalten C bzw. B des ersten Hilfsquadrates wie die ersten beiden Zahlen liegen. Diese vier Zahlen werden in die beiden Halbdiagonalen des linken oberen Quadranten des Zielquadrates eingetragen. (siehe Abbildung 11.72a)

Die erste Diagonale von links oben nach rechts unten dieses Teilquadrates wird jetzt mit den Zahlen 38 und 49 aufgefüllt, die auch in der ersten trimagischen Reihe sowie den Spalten h und d des zweiten Hilfsquadrates liegen. Damit sind auch die weiteren zwei Spalten des linken oberen Quadranten festgelegt und die beiden noch fehlenden Zahlen der zweiten Diagonale können auch eingetragen werden. (siehe Abbildung 11.72b)

Da jetzt alle Kennzeichnungen der vier Zeilen und Spalten dieses Quadranten bekannt sind, sind die restlichen Zahlen eindeutig bestimmt und können eingetragen werden. (siehe Abbildung 11.72c)

	C	B		
f	21			
b		2		
h		35		
d	56			

a) Schritt 1

	C	B	G	F
f	21			20
b		2	7	
h		35	38	
d	56			49

b) Schritt 2

	C	B	G	F
f	21	15	10	20
b	28	2	7	29
h	57	35	38	64
d	56	46	43	49

c) Schritt 3

Abb. 11.72: Füllen des linken oberen Quadranten

Für die von links oben nach rechts unten verlaufende Diagonale des rechten oberen Quadranten stehen aus der Spalte f des zweiten Hilfsquadrates prinzipiell die beiden Zahlen 59 und 62 zur Auswahl. Entscheidet man sich für 62, befindet sich die Zahl 41 in dieser trimagischen Reihe und der Spalte b. Mit entsprechenden Überlegungen kann dann der rechte obere Quadrant vervollständigt werden. (siehe Abbildung 11.73a)

Da danach alle Zeilen und Spalten gekennzeichnet sind, sind damit auch alle Zahlen der unteren Hälfte eindeutig bestimmt. (siehe Abbildung 11.73b)

	C	B	G	F	H	E	D	A
f	21	15	10	20	62	40	33	59
b	28	2	7	29	51	41	48	54
h	57	35	38	64	18	12	13	23
d	56	46	43	49	31	5	4	26

a) Schritt 4

	C	B	G	F	H	E	D	A
f	21	15	10	20	62	40	33	59
b	28	2	7	29	51	41	48	54
h	57	35	38	64	18	12	13	23
d	56	46	43	49	31	5	4	26
c	3	25	32	6	44	50	55	45
g	14	24	17	11	37	63	58	36
a	47	53	52	42	8	30	27	1
e	34	60	61	39	9	19	22	16

b) Schritt 3

Abb. 11.73: Füllen der weiteren Quadranten

Mit diesen Schritten ist das cabalistische magische Quadrat mit trimagischen Diagonalen der Ordnung $n = 8$ mit dem Verfahren von Portier erstellt worden. Die acht Blöcke, deren Zahlen die magische Summe 260 bzw. die bimagische Summe der quadrierten Zahlen 11 180 ergeben, sind in Abbildung 11.74 noch einmal besonders hervorgehoben.

21	15	10	20	62	40	33	59
28	2	7	29	51	41	48	54
57	35	38	64	18	12	13	23
56	46	43	49	31	5	4	26
3	25	32	6	44	50	55	45
14	24	17	11	37	63	58	36
47	53	52	42	8	30	27	1
34	60	61	39	9	19	22	16

Abb. 11.74: Cabalistisches magisches Quadrat der Ordnung $n = 8$ (Portier, Beispiel 2)

11.1.6 Gérardin

André Gérardin hat 1925 ein Verfahren vorgestellt, mit dem sich pandiagonale bimagische Quadrate der Ordnung $n = 8$ erzeugen lassen.[14] Dazu verwendet er die beiden diagonalen Euler-Quadrate aus Abbildung 11.75.

[14] Gérardin [157]

A	L	T	K	I	R	C	H
T	K	A	L	C	H	I	R
H	C	R	I	K	T	L	A
R	I	H	C	L	A	K	T
C	H	I	R	T	K	A	L
I	R	C	H	A	L	T	K
L	A	K	T	R	I	H	C
K	T	L	A	H	C	R	I

e	s	p	a	l	i	o	n
a	p	s	e	n	o	i	l
l	i	o	n	e	s	p	a
n	o	i	l	a	p	s	e
s	e	a	p	i	l	n	o
p	a	e	s	o	n	l	i
i	l	n	o	s	e	a	p
o	n	l	i	p	a	e	s

Abb. 11.75: Algebraisches Muster von Gérardin

Die Groß- und Kleinbuchstaben werden jeweils mit den Ziffern $0, 1, \ldots, 7$ belegt und die aus den beiden Ziffern zusammengesetzte Zahl im Zahlensystem zur Basis 8 interpretiert. Nach der Umwandlung in das Zehnersystem werden dann noch alle Zahlen inkrementiert. Gérardin wählte für sein Beispiel die Belegung aus Tabelle 11.17.

Belegung															
A	L	T	K	I	R	C	H	e	s	p	a	l	i	o	n
1	5	6	2	7	3	0	4	5	6	7	4	1	2	3	0

Tab. 11.17: Belegung von Gérardin

Mit dieser Belegung ergibt sich das pandiagonale bimagische Quadrat aus Abbildung 11.76.

1	5	6	2	7	3	0	4
6	2	1	5	0	4	7	3
4	0	3	7	2	6	5	1
3	7	4	0	5	1	2	6
0	4	7	3	6	2	1	5
7	3	0	4	1	5	6	2
5	1	2	6	3	7	4	0
2	6	5	1	4	0	3	7

a) linke Ziffer zur Basis 8

5	6	7	4	1	2	3	0
4	7	6	5	0	3	2	1
1	2	3	0	5	6	7	4
0	3	2	1	4	7	6	5
6	5	4	7	2	1	0	3
7	4	5	6	3	0	1	2
2	1	0	3	6	5	4	7
3	0	1	2	7	4	5	6

b) rechte Ziffer zur Basis 8

14	47	56	21	58	27	4	33
53	24	15	46	1	36	59	26
34	3	28	57	22	55	48	13
25	60	35	2	45	16	23	54
7	38	61	32	51	18	9	44
64	29	6	39	12	41	50	19
43	10	17	52	31	62	37	8
20	49	42	11	40	5	30	63

c) bimagisches Quadrat

Abb. 11.76: Pandiagonales bimagisches Quadrat (Gérardin, Beispiel 1)

Bei diesem Quadrat handelt es sich sogar um ein cabalistisches Quadrat, d.h. es besitzt folgende Eigenschaften:

- es ist pandiagonal
- es ist bimagisch
- es besitzt trimagische Diagonalen

- es lässt sich in 8 Rechtecke der Größe 2×4 aufteilen, deren Zahlen die magische Summe 260 bzw. die bimagische Summe 11 180 ergeben

Gérardin erwähnt in seinem Artikel, dass dieses cabalistische Quadrat auch von Portier konstruiert worden ist, der es bereits am 29.07.1912 in der Zeitung *L'Echo de Paris* veröffentlicht hat. Portier benutzte zur Konstruktion allerdings ein anderes Verfahren.[15]

Gérardin wies auch darauf hin, dass sich durch Transformationen oder andere Belegungen Millionen weiterer magischer Quadrate erzeugen lassen, die allerdings nicht mehr bimagisch sein müssen. Meine Untersuchungen haben gezeigt, dass es insgesamt 320 Belegungen gibt, mit denen sich auch 320 unterschiedliche cabalistische Quadrate erzeugen lassen.

Eine dieser Belegungen und das damit erzeugte cabalistische Quadrat ist in Abbildung 11.77 dargestellt.

Belegung	
A = 0	I = 3
L = 1	R = 2
T = 7	C = 4
K = 6	H = 5
e = 5	l = 4
s = 3	i = 2
p = 7	o = 6
a = 1	n = 0

6	12	64	50	29	19	39	41
58	56	4	14	33	47	27	21
45	35	23	25	54	60	16	2
17	31	43	37	10	8	52	62
36	46	26	24	59	53	1	15
32	18	38	44	7	9	61	51
11	5	49	63	20	30	42	40
55	57	13	3	48	34	22	28

Abb. 11.77: Cabalistisches magisches Quadrat (Gérardin, Beispiel 2)

Schaut man sich die Belegung der Großbuchstaben an, fallen einige Eigenschaften auf, die sich durch die strukturierte Anordnung des Musters aus Abbildung 11.75 erklären lassen.

So ist etwa die Summe der linken vier Zahlen für die Buchstaben ALTK mit 14 immer genauso groß wie die Summe der den Buchstaben IRCH zugeordneten Zahlen der rechten Hälfte. Damit gibt es genau sechs Zahlengruppen für diese beiden Hälften: 0167, 0257, 0347, 1256, 1346, 2345. Natürlich sind mit der Wahl einer dieser Zahlengruppen die zur Verfügung stehenden Zahlen für die andere Hälfte eindeutig bestimmt.

Weiterhin beträgt in beiden Hälften die Summe der jeweils ersten und dritten sowie der zweiten und vierten Zahl immer 7.

$$0+7=1+6=3+4=2+5=7$$

Bei den Kleinbuchstaben gibt es diese Unterteilung in zwei Hälften nicht, denn hier werden die acht Zahlen in vier Zahlenpaare unterteilt. Dabei ist der Summe des ersten Zahlenpaares immer gleich der Summe des zweiten Zahlenpaares. Ebenso stimmt die Summe des dritten Zahlenpaares mit der Summe des vierten Zahlenpaares überein. In dem Beispiel aus Abbildung 11.77 gilt beispielsweise

$$5+3=7+1=8 \qquad \text{und} \qquad 4+2=6+0=6$$

Die beiden Summen sind immer unterschiedlich und ergeben addiert natürlich die Summe der Zahlen $0, 1, \ldots, 7$, also 14. Insgesamt gibt es drei verschiedene Kombinationen von auftretenden Summen: 3 und 11, 5 und 9 sowie 6 und 8.

[15] siehe Kapitel 11.1.5

Hat man eine der 320 möglichen Belegungen bestimmt, lassen sich aufgrund des strukturierten Musters durch Vertauschungen weitere Belegungen erzeugen. Dazu werden hier einige Beispiele angeführt, die alle von den Zahlen der Belegung aus Abbildung 11.77 ausgehen.

- Bei den Großbuchstaben wird die linke Hälfte gegen die rechte Hälfte ausgetauscht. Die Kleinbuchstaben bleiben unverändert.
- Bei den Großbuchstaben wird das erste Zahlenpaar mit dem zweiten sowie das dritte Zahlenpaar mit dem vierten vertauscht. Die Kleinbuchstaben bleiben unverändert.
- Bei den Großbuchstaben wird die linke Hälfte gegen die rechte Hälfte ausgetauscht. Weiterhin wird das erste Zahlenpaar mit dem zweiten ebenso vertauscht wie das dritte Zahlenpaar mit dem vierten. Die Kleinbuchstaben bleiben unverändert.

30	20	40	42	5	11	63	49
34	48	28	22	57	55	3	13
53	59	15	1	46	36	24	26
9	7	51	61	18	32	44	38
60	54	2	16	35	45	25	23
8	10	62	52	31	17	37	43
19	29	41	39	12	6	50	64
47	33	21	27	56	58	14	4

a) 3 2 4 5 0 1 7 6   5 3 7 1 4 2 6 0

62	52	8	10	37	43	31	17
2	16	60	54	25	23	35	45
21	27	47	33	14	4	56	58
41	39	19	29	50	64	12	6
28	22	34	48	3	13	57	55
40	42	30	20	63	49	5	11
51	61	9	7	44	38	18	32
15	1	53	59	24	26	46	36

b) 7 6 0 1 4 5 3 2   5 3 7 1 4 2 6 0

38	44	32	18	61	51	7	9
26	24	36	46	1	15	59	53
13	3	55	57	22	28	48	34
49	63	11	5	42	40	20	30
4	14	58	56	27	21	33	47
64	50	6	12	39	41	29	19
43	37	17	31	52	62	10	8
23	25	45	35	16	2	54	60

c) 4 5 3 2 7 6 0 1   5 3 7 1 4 2 6 0

Abb. 11.78: Beispiel 1 bis 3: Cabalistische Quadrate mit den zugehörigen Belegungen

- Bei den Großbuchstaben werden die Zahlen in den einzelnen Zahlenpaaren jeweils vertauscht. Bei den Kleinbuchstaben wird das erste Zahlenpaar mit dem zweiten sowie das dritte Zahlenpaar mit dem vierten ausgetauscht.
- Bei den Großbuchstaben werden die Zahlen in den einzelnen Zahlenpaaren vertauscht. Bei den Kleinbuchstaben werden alle acht Zahlen in umgekehrter Reihenfolge angeordnet.
- Bei den Großbuchstaben werden die Zahlen in den einzelnen Zahlenpaaren vertauscht und danach die linke Hälfte gegen die rechte ausgetauscht. Bei den Kleinbuchstaben wird das erste Zahlenpaar mit dem zweiten sowie das dritte Zahlenpaar mit dem vierten ausgetauscht.

16	2	54	60	23	25	45	35
52	62	10	8	43	37	17	31
39	41	29	19	64	50	6	12
27	21	33	47	4	14	58	56
42	40	20	30	49	63	11	5
22	28	48	34	13	3	55	57
1	15	59	53	26	24	36	46
61	51	7	9	38	44	32	18

a) 1 0 6 7 2 3 5 4   7 1 5 3 6 0 4 2

9	7	51	61	18	32	44	38
53	59	15	1	46	36	24	26
34	48	28	22	57	55	3	13
30	20	40	42	5	11	63	49
47	33	21	27	56	58	14	4
19	29	41	39	12	6	50	64
8	10	62	52	31	17	37	43
60	54	2	16	35	45	25	23

b) 1 0 6 7 2 3 5 4   0 6 2 4 1 7 3 5

24	26	46	36	15	1	53	59
44	38	18	32	51	61	9	7
63	49	5	11	40	42	30	20
3	13	57	55	28	22	34	48
50	64	12	6	41	39	19	29
14	4	56	58	21	27	47	33
25	23	35	45	2	16	60	54
37	43	31	17	62	52	8	10

c) 2 3 5 4 1 0 6 7   7 1 5 3 6 0 4 2

Abb. 11.79: Beispiel 4 bis 6: Cabalistische Quadrate mit den zugehörigen Belegungen

- Bei den Großbuchstaben werden die Zahlen der beiden Hälften jeweils für sich in umgekehrter Reihenfolge angeordnet. Bei den Kleinbuchstaben wird das erste Zahlenpaar mit dem zweiten sowie das dritte Zahlenpaar mit dem vierten vertauscht.
- Die Großbuchstaben bleiben unverändert. Bei den Kleinbuchstaben werden die Zahlen in den einzelnen Zahlenpaaren jeweils vertauscht sowie die linke Hälfte gegen die rechte ausgetauscht.
- Bei den Großbuchstaben werden die Zahlen in den einzelnen Zahlenpaaren vertauscht. Bei den Kleinbuchstaben werden die Zahlenpaare in umgekehrter Reihenfolge angeordnet. Also zunächst das vierte Zahlenpaar, gefolgt vom dritten, dem zweiten und zum Abschluss dem ersten Zahlenpaar.

56	58	14	4	47	33	21	27
12	6	50	64	19	29	41	39
31	17	37	43	8	10	62	52
35	45	25	23	60	54	2	16
18	32	44	38	9	7	51	61
46	36	24	26	53	59	15	1
57	55	3	13	34	48	28	22
5	11	63	49	30	20	40	42

a) 6 7 1 0 5 4 2 3 7 1 5 3 6 0 4 2

3	13	57	55	28	22	34	48
63	49	5	11	40	42	30	20
44	38	18	32	51	61	9	7
24	26	46	36	15	1	53	59
37	43	31	17	62	52	8	10
25	23	35	45	2	16	60	54
14	4	56	58	21	27	47	33
50	64	12	6	41	39	19	29

b) 0 1 7 6 3 2 4 5 2 4 0 6 3 5 1 7

15	1	53	59	24	26	46	36
51	61	9	7	44	38	18	32
40	42	30	20	63	49	5	11
28	22	34	48	3	13	57	55
41	39	19	29	50	64	12	6
21	27	47	33	14	4	56	58
2	16	60	54	25	23	35	45
62	52	8	10	37	43	31	17

c) 1 0 6 7 2 3 5 4 6 0 4 2 7 1 5 3

Abb. 11.80: Beispiel 7 bis 9: Cabalistische Quadrate mit den zugehörigen Belegungen

11.1.7 Tarry – Cazalas

Cazalas hat in seinem Buch aus dem Jahre 1934 die Verwendung von arithmetischen Serien[16] auch bei Quadraten der Ordnung $n = 8$ analysiert.[17] Um 64 verschiedene Zahlen darstellen zu können, benutzt er arithmetische Serien der Form $(r_1, r_2, r_3)_2$ und $(s_1, s_2, s_3)_2$, mit denen sich die Tabelle 11.18 ergibt. Von dieser Tabelle sind hier nur einige Terme angegeben, da sich die Terme in allen anderen Zellen durch Addition ergeben.

0	r_1	r_2	$r_2 + r_1$	r_3	$r_3 + r_1$	$r_3 + r_2$	$r_3 + r_2 + r_1$
s_1	$s_1 + r_1$	$s_1 + r_2$	$s_1 + r_2 + r_1$	$\cdots$			
s_2	$s_2 + r_1$	$s_2 + r_2$	$s_2 + r_2 + r_1$	$\cdots$			
$s_2 + s_1$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$			
s_3							
$s_3 + s_1$							
$s3 + s_2$							
$s3 + s_2 + s_1$							

Tab. 11.18: Tabelle mit den arithmetischen Serien $(r_1, r_2, r_3)_2$ und $(s_1, s_2, s_3)_2$

[16] siehe Kapitel 11.2.4
[17] Cazalas [79] S. 69 – 96

Für die Serien $(r_1, r_2, r_3)_2 = (010111, 111001, 100011)_2$ und $(s_1, s_2, s_3)_2 = (100110, 010011, 011100)_2$, ergeben sich damit die Werte aus Tabelle 11.19.

	0	r_1	r_2	$r_2 + r_1$	r_3	$r_3 + r_1$	$r_3 + r_2$	$r_3 + r_2 + r_1$
0	000000	010111	111001	101110	100011	110100	011010	001101
s_1	100110	110001	011111	001000	000101	010010	111100	101011
s_2	010011	000100	101010	111101	110000	100111	001001	011110
$s_2 + s_1$	110101	100010	001100	011011	010110	000001	101111	111000
s_3	011100	001011	100101	110010	111111	101000	000110	010001
$s_3 + s_1$	111010	101101	000011	010100	011001	001110	100000	110111
$s3 + s_2$	001111	011000	110110	100001	101100	111011	010101	000010
$s3 + s_2 + s_1$	101001	111110	010000	000111	001010	011101	110011	100100

Tab. 11.19: Tabelle mit den arithmetischen Serien $(010111, 111001, 100011)_2$ und $(100110, 010011, 011100)_2$

Wandelt man diese Zahlen aus dem Zweiersystem in das Zehnersystem um und erhöht dabei alle Zahlen um 1, erhält man das pandiagonale und semi-bimagische Quadrat aus Abbildung 11.81.

1	24	58	47	36	53	27	14
39	50	32	9	6	19	61	44
20	5	43	62	49	40	10	31
54	35	13	28	23	2	48	57
29	12	38	51	64	41	7	18
59	46	4	21	26	15	33	56
16	25	55	34	45	60	22	3
42	63	17	8	11	30	52	37

Abb. 11.81: Pandiagonales und semi-bimagisches Quadrat

Cazalas hat nachgewiesen, dass die Diagonalen mit der Methode der arithmetischen Serien nicht bimagisch gemacht werden können. Allerdings kann man jetzt wie beispielsweise bei den Verfahren von Coccoz oder Rilly[18] vorgehen und das semi-bimagische Quadrat in ein bimagisches umwandeln. Dazu muss man unter den 38 039 bimagischen Reihen zwei passende finden, die für die Diagonalen geeignet sind und durch das Vertauschen von Zeilen und Spalten ein bimagisches Quadrat zu erzeugen. Zum Beispiel kann man die beiden bimagischen Reihen aus Tabelle 11.20 benutzen.

Diagonale 1	2	10	24	32	37	45	51	59
Diagonale 2	6	14	20	28	33	41	55	63

Tab. 11.20: Bimagische Reihen für die Diagonalen

[18] siehe Kapitel 11.1.1 bzw. 11.1.3

Wie man in Abbildung 11.81 erkennt, ist in jeder Zeile und Spalte des semi-bimagischen Quadrates jeweils eine Zahl der beiden für die Diagonalen vorgesehenen magischen Reihen vorhanden. Deshalb kann man die Zeilen und Spalten so vertauschen, dass die entsprechenden Zahlen wie im bimagischen Quadrat der Abbildung 11.82b auf den Diagonalen liegen.

1	24	58	47	36	53	27	14
39	50	32	9	6	19	61	44
20	5	43	62	49	40	10	31
54	35	13	28	23	2	48	57
29	12	38	51	64	41	7	18
59	46	4	21	26	15	33	56
16	25	55	34	45	60	22	3
42	63	17	8	11	30	52	37

a) semi-bimagisches Quadrat

24	58	27	53	47	1	36	14
50	32	61	19	9	39	6	44
5	43	10	40	62	20	49	31
35	13	48	2	28	54	23	57
12	38	7	41	51	29	64	18
46	4	33	15	21	59	26	56
25	55	22	60	34	16	45	3
63	17	52	30	8	42	11	37

b) bimagisches Quadrat

Abb. 11.82: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 8$ (Tarry - Cazalas, Beispiel 1)

Cazalas gibt aber auch eine Änderung für die Methode der arithmetischen Serien an, mit der sich für die bimagischen Quadrate der Ordnung $n = 8$ von Tarry[19] mit einem zusätzlichen Schritt pandiagonale bimagische Quadrate mit trimagischen Diagonalen erzeugen lassen.

Dieser zusätzliche Schritt besteht einfach nur darin, dass zu allen Zahlen des semi-bimagischen Quadrates eine konstante Zahl addiert wird. Für das Beispiel aus Tabelle 11.29 lautet diese Konstante 011110 .

000000	010111	111001	101110	100011	110100	011010	001101
100110	110001	011111	001000	000101	010010	111100	101011
010011	000100	101010	111101	110000	100111	001001	011110
110101	100010	001100	011011	010110	000001	101111	111000
011100	001011	100101	110010	111111	101000	000110	010001
111010	101101	000011	010100	011001	001110	100000	110111
001111	011000	110110	100001	101100	111011	010101	000010
101001	111110	010000	000111	001010	011101	110011	100100

Abb. 11.83: Quadrat mit den arithmetischen Serien $(010111, 111001, 100011)_2$ und $(100110, 010011, 011100)_2$

Aus dem Ausgangsquadrat in Abbildung 11.83 entsteht durch diese Addition das Quadrat in Abbildung 11.84

[19] siehe Kapitel 11.1.4

011110	001001	100111	110000	111101	101010	000100	010011
111000	101111	000001	010110	011011	001100	100010	110101
001101	011010	110100	100011	101110	111001	010111	000000
101011	111100	010010	000101	001000	011111	110001	100110
000010	010101	111011	101100	100001	110110	011000	001111
100100	110011	011101	001010	000111	010000	111110	101001
010001	000110	101000	111111	110010	100101	001011	011100
110111	100000	001110	011001	010100	000011	101101	111010

Abb. 11.84: Quadrat nach der Addition mit der Konstanten 011110

Wandelt man alle Zahlen aus dem Zweiersystem in das Zehnersystem um und erhöht sie um 1, erhält man das pandiagonale und bimagische Quadrat aus Abbildung 11.85, welches zudem trimagische Diagonalen besitzt.

31	10	40	49	62	43	5	20
57	48	2	23	28	13	35	54
14	27	53	36	47	58	24	1
44	61	19	6	9	32	50	39
3	22	60	45	34	55	25	16
37	52	30	11	8	17	63	42
18	7	41	64	51	38	12	29
56	33	15	26	21	4	46	59

Abb. 11.85: Pandiagonales und bimagisches Quadrat (Tarry - Cazalas, Beispiel 2)

Cazalas hat für alle mit der Methode von Tarry erzeugten bimagischen Quadrate der Ordnung $n = 8$ arithmetische Serien und die benötigte Konstante angegeben, so dass sich die bimagischen Quadrate von Tarry auch mit dieser Methode erzeugen lassen.[20]

r_1	r_2	r_3	s_1	s_1	s_1	Konstante
010111	111001	100011	100110	010011	011100	011110
111010	001111	100011	001011	100101	011100	010011
001101	010011	101010	111100	001111	010101	010001
010110	100101	101010	100111	111001	010101	100101
110001	011100	001011	100111	111001	110100	010011
101100	110010	001011	111010	010111	110100	111001
001110	100011	011001	111100	001111	100110	011010
100101	010110	011001	010111	111010	100110	100101
111100	010111	110001	101001	110100	001110	101001
100111	111010	110001	110010	011001	001110	111010

Tab. 11.21: Arithmetische Serien für die bimagischen Quadrate von Tarry

[20] Cazalas [79] S. 109

Ein weiteres Beispiel zeigt die Serien $(100111, 111010, 110001)_2$ und $(110010, 011001, 001110)_2$ mit der zugehörigen Konstanten 111010, die bei Cazalas unter der Nummer 10 geführt wird. Mit diesen beiden Serien ergibt sich zunächst ein pandiagonales und semi-bimagisches Quadrat.

000000	100111	111010	011101	110001	010110	001011	101100
110010	010101	001000	101111	000011	100100	111001	011110
011001	111110	100011	000100	101000	001111	010010	110101
101011	001100	010001	110110	011010	111101	100000	000111
001110	101001	110100	010011	111111	011000	000101	100010
111100	011011	000110	100001	001101	101010	110111	010000
010111	110000	101101	001010	100110	000001	011100	111011
100101	000010	011111	111000	010100	110011	101110	001001

Abb. 11.86: Quadrat mit den arithmetischen Serien $(100111, 111010, 110001)_2$ und $(110010, 011001, 001110)_2$

Zu allen Zahlen wird anschließend die spezielle Konstante 111010 hinzuaddiert und es entsteht das bimagische Quadrat aus Abbildung 11.87.

111010	011101	000000	100111	001011	101100	110001	010110
001000	101111	110010	010101	111001	011110	000011	100100
100011	000100	011001	111110	010010	110101	101000	001111
010001	110110	101011	001100	100000	000111	011010	111101
110100	010011	001110	101001	000101	100010	111111	011000
000110	100001	111100	011011	110111	010000	001101	101010
101101	001010	010111	110000	011100	111011	100110	000001
011111	111000	100101	000010	101110	001001	010100	110011

Abb. 11.87: Quadrat nach der Addition mit der Konstanten 111010

Wandelt man jetzt wieder alle Zahlen aus dem Zweiersystem in das Zehnersystem um und erhöht sie um 1, erhält man das pandiagonale und bimagische Quadrat mit trimagische Diagonalen aus Abbildung 11.88.

59	30	1	40	12	45	50	23
9	48	51	22	58	31	4	37
36	5	26	63	19	54	41	16
18	55	44	13	33	8	27	62
53	20	15	42	6	35	64	25
7	34	61	28	56	17	14	43
46	11	24	49	29	60	39	2
32	57	38	3	47	10	21	52

Abb. 11.88: Pandiagonales und bimagisches Quadrat (Tarry - Cazalas, Beispiel 3)

Variante

Weitere bimagische Quadrate ergeben sich mit dieser Methode, wenn man die Serien $(r_1, r_2, r_3)_2$ und $(s_1, s_2, s_3)_2$ auf gleiche Weise umordnet, beispielsweise zu $(r_2, r_3, r_3)_1$ und $(s_2, s_3, s_3)_1$. Mit den gleichen Parametern wie im letzten Beispiel ergibt sich jetzt das pandiagonale und semi-bimagische Quadrat aus Abbildung 11.89.

000000	111010	110001	001011	100111	011101	010110	101100
011001	100011	101000	010010	111110	000100	001111	110101
001110	110100	111111	000101	101001	010011	011000	100010
010111	101101	100110	011100	110000	001010	000001	111011
110010	001000	000011	111001	010101	101111	100100	011110
101011	010001	011010	100000	001100	110110	111101	000111
111100	000110	001101	110111	011011	100001	101010	010000
100101	011111	010100	101110	000010	111000	110011	001001

Abb. 11.89: Quadrat mit den arithmetischen Serien $(111010, 110001, 100111)_2$ und $(011001, 001110, 110010)_2$

Danach muss zu allen Zahlen wieder die spezielle Konstante 111010 hinzuaddiert werden.

111010	000000	001011	110001	011101	100111	101100	010110
100011	011001	010010	101000	000100	111110	110101	001111
110100	001110	000101	111111	010011	101001	100010	011000
101101	010111	011100	100110	001010	110000	111011	000001
001000	110010	111001	000011	101111	010101	011110	100100
010001	101011	100000	011010	110110	001100	000111	111101
000110	111100	110111	001101	100001	011011	010000	101010
011111	100101	101110	010100	111000	000010	001001	110011

Abb. 11.90: Quadrat nach der Addition mit der Konstanten 111010

Wandelt man jetzt alle Zahlen aus dem Zweiersystem in das Zehnersystem um und erhöht sie um 1, erhält man das pandiagonale und bimagische Quadrat mit trimagische Diagonalen aus Abbildung 11.91.

1	59	50	12	40	30	23	45
26	36	41	19	63	5	16	54
15	53	64	6	42	20	25	35
24	46	39	29	49	11	2	60
51	9	4	58	22	48	37	31
44	18	27	33	13	55	62	8
61	7	14	56	28	34	43	17
38	32	21	47	3	57	52	10

Abb. 11.91: Pandiagonales und bimagisches Quadrat (Tarry - Cazalas, Beispiel 4)

11.1.8 Hendricks

Um ein pandiagonales bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 8$ zu erzeugen, geht John R. Hendricks von einem algebraischen Muster aus.[21]

Ac	Cb	Dd	Ba	ac	cb	dd	ba
Da	Bd	Ab	Cc	da	bd	ab	cc
Bb	Dc	Ca	Ad	bb	dc	ca	ad
Cd	Aa	Bc	Db	cd	aa	bc	db
AC	CB	DD	BA	aC	cB	dD	bA
DA	BD	AB	CC	dA	bD	aB	cC
BB	DC	CA	AD	bB	dC	cA	aD
CD	AA	BC	DB	cD	aA	bC	dB

Abb. 11.92: Algebraisches Muster

Man erkennt, dass es sich um ein pandiagonales Muster handelt, bei dem auch die vier Quadranten magisch sind, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

$$a + b + c + d = A + B + C + D$$

Für die Ordnung $n = 8$ gibt es eine Zerlegung der Zahlen $0, 1, \ldots, 7$ in zwei Gruppen, bei denen nicht nur die Summe der Zahlen, sondern auch die Summe der quadrierten Zahlen übereinstimmt.

$$0 + 3 + 5 + 6 = 1 + 2 + 4 + 7$$
$$0^2 + 3^2 + 5^2 + 6^2 = 1^2 + 2^2 + 4^2 + 7^2$$

Mit einer solchen Belegung wird das algebraische Muster aus Abbildung 11.92 nicht nur pandiagonal, sondern auch semi-bimagisch, wenn zusätzlich folgende Bedingungen erfüllt werden.

$$A + a = B + b = C + c = D + d = 7$$

[21] Hendricks [196] S. 105 ff.

Nur die Zahlen auf den beiden Diagonalen ergeben addiert nicht die bimagische Summe. Mit dem Tausch von jeweils zwei Zeilen wie in Abbildung 11.93 werden aber auch die Diagonalen angeglichen, wobei allerdings die magischen Teilquadrate verloren gehen. Die Zahlen in den vier Quadranten besitzen aber die gleiche Summe 520.

Ac	Cb	Dd	Ba	ac	cb	dd	ba
Da	Bd	Ab	Cc	da	bd	ab	cc
Bb	Dc	Ca	Ad	bb	dc	ca	ad
Cd	Aa	Bc	Db	cd	aa	bc	db
AC	CB	DD	BA	aC	cB	dD	bA
DA	BD	AB	CC	dA	bD	aB	cC
BB	DC	CA	AD	bB	dC	cA	aD
CD	AA	BC	DB	cD	aA	bC	dB

a) Ausgangsmuster

Ac	Cb	Dd	Ba	ac	cb	dd	ba
DA	BD	AB	CC	dA	bD	aB	cC
BB	DC	CA	AD	bB	dC	cA	aD
Cd	Aa	Bc	Db	cd	aa	bc	db
AC	CB	DD	BA	aC	cB	dD	bA
Da	Bd	Ab	Cc	da	bd	ab	cc
Bb	Dc	Ca	Ad	bb	dc	ca	ad
CD	AA	BC	DB	cD	aA	bC	dB

b) Vertauschen von Zeilen

Abb. 11.93: Bimagisches und pandiagonales Muster durch Vertauschen von Zeilen

Mit einer geeigneten Belegung des algebraischen Musters erhält man dann wie in Abbildung 11.94 ein bimagisches und pandiagonales magisches Quadrat. Zusätzlich besitzt das Quadrat auch trimagische Diagonalen.

Belegung							
A	B	C	D	a	b	c	d
0	3	5	6	7	4	2	1

3	45	50	32	59	21	10	40
49	31	4	46	9	39	60	22
28	54	41	7	36	14	17	63
42	8	27	53	18	64	35	13
6	44	55	25	62	20	15	33
56	26	5	43	16	34	61	19
29	51	48	2	37	11	24	58
47	1	30	52	23	57	38	12

Abb. 11.94: Bimagisches und pandiagonales magisches Quadrat der Ordnung $n = 8$ (Hendricks, Beispiel 1)

Ein weiteres bimagisches und pandiagonales Muster erhält man, wenn man die entsprechenden Spalten vertauscht.

Ac	Cb	Dd	Ba	ac	cb	dd	ba
Da	Bd	Ab	Cc	da	bd	ab	cc
Bb	Dc	Ca	Ad	bb	dc	ca	ad
Cd	Aa	Bc	Db	cd	aa	bc	db
AC	CB	DD	BA	aC	cB	dD	bA
DA	BD	AB	CC	dA	bD	aB	cC
BB	DC	CA	AD	bB	dC	cA	aD
CD	AA	BC	DB	cD	aA	bC	dB

a) Ausgangsmuster

Ac	cb	dd	Ba	ac	Cb	Dd	ba
Da	bd	ab	Cc	da	Bd	Ab	cc
Bb	dc	ca	Ad	bb	Dc	Ca	ad
Cd	aa	bc	Db	cd	Aa	Bc	db
AC	cB	dD	BA	aC	CB	DD	bA
DA	bD	aB	CC	dA	BD	AB	cC
BB	dC	cA	AD	bB	DC	CA	aD
CD	aA	bC	DB	cD	AA	BC	dB

b) Vertauschen von Spalten

Abb. 11.95: Bimagisches und pandiagonales Muster durch Vertauschen von Spalten

Mit der gleichen Belegung wie im oberen Beispiel erhält man dann ein weiteres bimagisches und pandiagonales magisches Quadrat mit trimagischen Diagonalen. (siehe Abbildung 11.96)

Belegung							
A	B	C	D	a	b	c	d
0	3	5	6	7	4	2	1

3	21	10	32	59	45	50	40
56	34	61	43	16	26	5	19
29	11	24	2	37	51	48	58
42	64	35	53	18	8	27	13
6	20	15	25	62	44	55	33
49	39	60	46	9	31	4	22
28	14	17	7	36	54	41	63
47	57	38	52	23	1	30	12

Abb. 11.96: Bimagisches und pandiagonales magisches Quadrat der Ordnung $n = 8$ (Hendricks, Beispiel 2)

Variationen

Weitere Variationsmöglichkeiten ergeben sich durch unterschiedliche Belegungen des algebraischen Musters. In den bisherigen Beispielen wurden die Zahlen $0, 3, 5, 6$ immer für die Großbuchstaben und $1, 2, 4, 7$ für die Kleinbuchstaben benutzt. Dies kann aber auch genau umgekehrt geschehen. Ebenso kann die Zuordnung der vier Zahlen zu den Großbuchstaben beliebig gewählt werden. Die Kleinbuchstaben erhalten dann die zu $n - 1 = 7$ komplementäre Zahl.

17	60	15	38	41	4	55	30
11	34	21	64	51	26	45	8
37	16	59	18	29	56	3	42
63	22	33	12	7	46	25	52
24	61	10	35	48	5	50	27
14	39	20	57	54	31	44	1
36	9	62	23	28	49	6	47
58	19	40	13	2	43	32	53

Belegung							
A	B	C	D	a	b	c	d
2	4	7	1	5	3	0	6

Abb. 11.97: Bimagisches und pandiagonales magisches Quadrat der Ordnung $n = 8$ (Hendricks, Beispiel 3)

11.1.9 Kejun Chen – Wen Li

Kejun Chen und Wen Li haben ein Verfahren entwickelt, mit dem sich symmetrische bimagische Quadrate der Ordnung $m \cdot n$ mit trimagischen Diagonalen konstruieren lassen, wenn die Bedingungen $m, n \notin \{2, 3, 6\}$ und $m \equiv n \mod 2$ erfüllt sind.[22]

Für die Ordnung $m \cdot n = 2 \cdot 4 = 8$ werden dazu ein magisches Rechteck der Größe 4 x 2 und ein idempotentes selbst-orthogonales lateinisches Quadrat der Ordnung $n = 4$ benötigt.

1	2	4	7
6	5	3	0

0	2	3	1
3	1	0	2
1	3	2	0
2	0	1	3

Abb. 11.98: Ausgangsdaten für das Verfahren von Kejun Chen und Wen Li

Während bei den Beschreibungen in diesem Dokument immer die linke untere Ecke eines Quadrates mit $M_{0,0}$ bezeichnet wird, benutzen Kejun Chen und Wen Li in ihrem Artikel die mathematische Matrizenschreibweise, bei der $M_{0,0}$ die linke obere Ecke bezeichnet. Da hier eine Anpassung der Schreibweise einen Vergleich mit dem mathematischen Beweis aus dem Originaldokument sehr erschweren würde, wird bei der Beschreibung dieses Verfahrens ausnahmsweise die Darstellung von Kejun Chen und Wen Li übernommen.

Das magische Rechteck wird folgendermaßen bezeichnet:

$$r_{k,j} \quad \text{mit } 0 \leq j \leq n-1 \text{ und } k \in \{0, 1\}$$

Zusätzlich werden weitere n x n - Matrizen A_k und B_k benötigt:

$$\begin{aligned} A_k &= a_{i,j}^{(k)} \qquad & a_{i,j}^{(k)} &= r_{k,x_{ij}} \qquad 0 \leq i, j \leq n-1 \\ B_k &= b_{i,j}^{(k)} \qquad & b_{i,j}^{(k)} &= \begin{cases} h_{1-k,x_{ji}+1} & \text{für } x_{ji} \equiv 0 \mod 2 \\ h_{1-k,x_{ji}-1} & \text{für } x_{ji} \equiv 1 \mod 2 \end{cases} \end{aligned}$$

22 Kejun Chen und Wen Li [86]

Damit ergeben sich die vier Hilfsquadrate aus Abbildung 11.99.

1	4	7	2
7	2	1	4
2	7	4	1
4	1	2	7

A_0

6	3	0	5
0	5	6	3
5	0	3	6
3	6	5	0

A_1

5	3	6	0
0	6	3	5
3	5	0	6
6	0	5	3

B_0

2	4	1	7
7	1	4	2
4	2	7	1
1	7	2	4

B_1

Abb. 11.99: Hilfsquadrate der Ordnung $n = 4$

Aus den Hilfsquadraten A_0 und A_1 wird mit der Anordnung aus Abbildung 11.100 das Hilfsquadrat A der Ordnung $2n$ gebildet.

A_0	A_0
A_1	A_1

1	4	7	2	1	4	7	2
7	2	1	4	7	2	1	4
2	7	4	1	2	7	4	1
4	1	2	7	4	1	2	7
6	3	0	5	6	3	0	5
0	5	6	3	0	5	6	3
5	0	3	6	5	0	3	6
3	6	5	0	3	6	5	0

Abb. 11.100: Hilfsquadrat A

Ebenso setzt sich das Hilfsquadrat B aus den Teilquadraten B_0 und B_1 zusammen, jedoch wird hier eine andere Anordnung gewählt, wie in Abbildung 11.101 zu erkennen ist.

B_0	B_1
B_0	B_1

5	3	6	0	2	4	1	7
0	6	3	5	7	1	4	2
3	5	0	6	4	2	7	1
6	0	5	3	1	7	2	4
5	3	6	0	2	4	1	7
0	6	3	5	7	1	4	2
3	5	0	6	4	2	7	1
6	0	5	3	1	7	2	4

Abb. 11.101: Hilfsquadrat B

Leider handelt es sich bei den Hilfsquadraten A und B noch nicht um orthogonale Quadrate. Diese kann man jedoch mit Hilfe von zwei zusätzlichen Permutationen π_1 und π_2 erhalten.

$$\pi_1 = (n, 2n-1)(n+1, 2n-2)\cdots(n+\tfrac{n-2}{2}, n+\tfrac{n}{2})$$
$$\pi_2 = (1, 2n-2)(3, 2n-4)\cdots(n-1, n)$$

Für die Ordnung 8 lauten diese beiden Permutationen damit:

$$\pi_1 = (4,7)(5,6)$$
$$\pi_2 = (1,6)(3,4)$$

Diese beiden Permutationen werden auf die Hilfsquadrate A und B so angewendet, wie es die Reihenfolge der nachfolgenden Grafiken beschreibt. Dabei wird in den folgenden Abbildungen das Quadrat A und dessen Folgequadrate immer links und B entsprechend rechts dargestellt.

Bei diesen Vertauschungen kann es durchaus vorkommen, dass sie teilweise ohne Auswirkungen bleiben, weil die zu vertauschenden Spalten und Zeilen bereits die richtigen Zahlen beinhalten. Das ist aber bei diesem allgemein gehaltenen Algorithmus kein Problem, wie Chen und Li in ihrem mathematischen Beweis nachweisen.

	0	1	2	3	7	6	5	4
0	1	4	7	2	2	7	4	1
1	7	2	1	4	4	1	2	7
2	2	7	4	1	1	4	7	2
3	4	1	2	7	7	2	1	4
4	6	3	0	5	5	0	3	6
5	0	5	6	3	3	6	5	0
6	5	0	3	6	6	3	0	5
7	3	6	5	0	0	5	6	3

	0	1	2	3	7	6	5	4
0	5	3	6	0	7	1	4	2
1	0	6	3	5	2	4	1	7
2	3	5	0	6	1	7	2	4
3	6	0	5	3	4	2	7	1
4	5	3	6	0	7	1	4	2
5	0	6	3	5	2	4	1	7
6	3	5	0	6	1	7	2	4
7	6	0	5	3	4	2	7	1

Abb. 11.102: Spaltenpermutation π_1

	0	1	2	3	7	6	5	4
0	1	4	7	2	2	7	4	1
1	7	2	1	4	4	1	2	7
2	2	7	4	1	1	4	7	2
3	4	1	2	7	7	2	1	4
7	3	6	5	0	0	5	6	3
6	5	0	3	6	6	3	0	5
5	0	5	6	3	3	6	5	0
4	6	3	0	5	5	0	3	6

	0	1	2	3	7	6	5	4
0	5	3	6	0	7	1	4	2
1	0	6	3	5	2	4	1	7
2	3	5	0	6	1	7	2	4
3	6	0	5	3	4	2	7	1
7	6	0	5	3	4	2	7	1
6	3	5	0	6	1	7	2	4
5	0	6	3	5	2	4	1	7
4	5	3	6	0	7	1	4	2

Abb. 11.103: Zeilenpermutation π_1

	0	5	2	7	3	6	1	4
0	1	4	7	2	2	7	4	1
1	7	2	1	4	4	1	2	7
2	2	7	4	1	1	4	7	2
3	4	1	2	7	7	2	1	4
7	3	6	5	0	0	5	6	3
6	5	0	3	6	6	3	0	5
5	0	5	6	3	3	6	5	0
4	6	3	0	5	5	0	3	6

	0	5	2	7	3	6	1	4
0	5	4	6	7	0	1	3	2
1	0	1	3	2	5	4	6	7
2	3	2	0	1	6	7	5	4
3	6	7	5	4	3	2	0	1
7	6	7	5	4	3	2	0	1
6	3	2	0	1	6	7	5	4
5	0	1	3	2	5	4	6	7
4	5	4	6	7	0	1	3	2

Abb. 11.104: Spaltenpermutation π_2

Bei den beiden Quadraten in Abbildung 11.104 handelt es sich jetzt um orthogonale Quadrate. Überlagert man diese Quadrate, entsteht das symmetrische bimagische Quadrat mit trimagischen Diagonalen aus Abbildung 11.105.

$$Q = 8 \cdot A + B + 1$$

14	37	63	24	17	58	36	11
57	18	12	35	38	13	23	64
20	59	33	10	15	40	62	21
39	16	22	61	60	19	9	34
31	56	46	5	4	43	49	26
44	3	25	50	55	32	6	45
1	42	52	27	30	53	47	8
54	29	7	48	41	2	28	51

Abb. 11.105: Symmetrisches bimagisches Quadrat der Ordnung 8 mit trimagischen Diagonalen (Chen - Li)

Variationen

Dieses Verfahren lässt sich auf vielfache Art und Weise variieren, so dass sich viele unterschiedliche bimagische Quadrate ergeben. Zunächst einmal kann man bei dem magischen Rechteck die Spalten beliebig permutieren und auch die beiden Zeilen austauschen.

Auch das lateinische Ausgangsquadrat lässt sich verändern. Chen und Li weisen nach, dass jedes idempotente selbst-orthogonale lateinische Quadrat (isols) geeignet ist. Bei der Ordnung 4 gibt es allerdings nur zwei, nämlich das bereits angegebene und das transponierte Quadrat. Allerdings gibt es bei dieser Ordnung auch 30 weitere selbst-orthogonale lateinische Quadrate (sols), die für die Konstruktion geeignet sind. Eines davon ist in Abbildung 11.106 benutzt worden.

3	6	5	0
4	1	2	7

a) mag. Rechteck

3	1	2	0
2	0	3	1
0	2	1	3
1	3	0	2

b) sols

3	49	42	28	29	47	56	6
45	31	8	54	51	1	26	44
32	46	53	7	2	52	43	25
50	4	27	41	48	30	5	55
10	60	35	17	24	38	61	15
40	22	13	63	58	12	19	33
21	39	64	14	11	57	34	20
59	9	18	36	37	23	16	62

c) bimagisches Quadrat

Abb. 11.106: Symmetrisches bimagisches Quadrat der Ordnung 8 mit trimagischen Diagonalen (Chen - Li)

11.1.10 De Winkel

Aale de Winkel erzeugt aus digitalen Gleichungen bimagische Quadrate achter Ordnung[23], wobei er wie immer bei seinen Verfahren den Ursprung $(0, 0)$ in die linke obere Ecke legt. Bei diesem Verfahren wird jede Koordinate (s, z) in eine Binärzahl mit drei Ziffern umgewandelt,

$$\begin{aligned} s &= 4 \cdot s_1 + 2 \cdot s_2 + s_3 \\ z &= 4 \cdot z_1 + 2 \cdot z_2 + z_3 \end{aligned}$$

Für die Position $(6, 1)$ ergibt sich beispielsweise die binäre Darstellung $(110, 001)$. Mit den Faktoren

$$(a_1 \;\; a_2 \;\; a_3 \;\; a_4 \;\; a_5 \;\; a_6) \qquad (b_1 \;\; b_2 \;\; b_3 \;\; b_4 \;\; b_5 \;\; b_6) \qquad (c_1 \;\; c_2 \;\; c_3 \;\; c_4 \;\; c_5 \;\; c_6)$$

werden dann die binären Ziffern der in diese Zelle einzutragenden Zahl berechnet, wobei die drei Ergebnisse modulo 2 betrachtet werden.

$$\begin{aligned} d_3 &= a_1 \cdot s_1 + a_2 \cdot s_2 + a_3 \cdot s_3 + a_4 \cdot z_1 + a_5 \cdot z_2 + a_6 \cdot z_3 \\ d_2 &= b_1 \cdot s_1 + b_2 \cdot s_2 + b_3 \cdot s_3 + b_4 \cdot z_1 + b_5 \cdot z_2 + b_6 \cdot z_3 \\ d_1 &= c_1 \cdot s_1 + c_2 \cdot s_2 + c_3 \cdot s_3 + c_4 \cdot z_1 + c_5 \cdot z_2 + c_6 \cdot z_3 \end{aligned}$$

Aus diesen drei Ziffern wird dann mit

$$d = 4 \cdot d_3 + 2 \cdot d_2 + d_1$$

die einzutragende Zahl d im Zehnersystem berechnet, die in die entsprechende Zelle des Hilfsquadrates eingetragen wird. Mit den Koeffizienten

$$\begin{array}{llllll} a_1 = 0 & a_2 = 0 & a_3 = 1 & a_4 = 1 & a_5 = 0 & a_6 = 1 \\ b_1 = 0 & b_2 = 1 & b_3 = 1 & b_4 = 0 & b_5 = 0 & b_6 = 1 \\ c_1 = 1 & c_2 = 1 & c_3 = 0 & c_4 = 1 & c_5 = 1 & c_6 = 1 \end{array}$$

[23] de Winkel [582]

ergibt sich für die Position (6, 1)

$$
\begin{aligned}
d_3 &= 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1 \\
d_2 &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2 \equiv 0 \\
d_1 &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3 \equiv 1
\end{aligned}
$$

Damit lautet die einzutragende Zahl

$$d = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 = 5$$

Insgesamt erhält man das Hilfsquadrat A aus Abbildung 11.107. Mit den gleichen Koeffizienten wird auch das Hilfsquadrat B berechnet, so dass sich in diesem Spezialfall das gleiche Hilfsquadrat ergibt.

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	6	3	5	1	7	2	4
1	7	1	4	2	6	0	5	3
2	1	7	2	4	0	6	3	5
3	6	0	5	3	7	1	4	2
4	5	3	6	0	4	2	7	1
5	2	4	1	7	3	5	0	6
6	4	2	7	1	5	3	6	0
7	3	5	0	6	2	4	1	7

a) Hilfsquadrat A

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	6	3	5	1	7	2	4
1	7	1	4	2	6	0	5	3
2	1	7	2	4	0	6	3	5
3	6	0	5	3	7	1	4	2
4	5	3	6	0	4	2	7	1
5	2	4	1	7	3	5	0	6
6	4	2	7	1	5	3	6	0
7	3	5	0	6	2	4	1	7

b) Hilfsquadrat B

Abb. 11.107: Geordnete lateinische Hilfsquadrate

Das Hilfsquadrat B muss nun noch weiter verarbeitet werden. Zunächst wird eine Zeilen- und Spaltentransformation durchgeführt, die durch die neue Reihenfolge

$$1 \quad 7 \quad 4 \quad 2 \quad 5 \quad 3 \quad 0 \quad 6$$

festgelegt ist. Zusätzlich muss das sich hieraus ergebende Quadrat noch an der Nebendiagonalen gespiegelt werden. Das sich hieraus ergebende veränderte Hilfsquadrat B ist in Abbildung 11.108 dargestellt.

	1	7	4	2	5	3	0	6
1	1	3	6	4	0	2	7	5
7	5	7	2	0	4	6	3	1
4	3	1	4	6	2	0	5	7
2	7	5	0	2	6	4	1	3
5	4	6	3	1	5	7	2	0
3	0	2	7	5	1	3	6	4
0	6	4	1	3	7	5	0	2
6	2	0	5	7	3	1	4	6

a) Zeilen- und Spaltentausch

1	5	3	7	4	0	6	2
3	7	1	5	6	2	4	0
6	2	4	0	3	7	1	5
4	0	6	2	1	5	3	7
0	4	2	6	5	1	7	3
2	6	0	4	7	3	5	1
7	3	5	1	2	6	0	4
5	1	7	3	0	4	2	6

b) Spiegelung an der Nebendiagonalen

Abb. 11.108: Das veränderte Hilfsquadrat B

Abschließend werden diese beiden Hilfsquadrate nun noch mit der Gleichung

$$8 \cdot A + B + 1$$

überlagert und es entsteht das bimagische Quadrat aus Abbildung 11.109, das auch trimagische Diagonalen besitzt.

2	54	28	48	13	57	23	35
60	16	34	22	55	3	45	25
15	59	21	33	4	56	26	46
53	1	47	27	58	14	36	24
41	29	51	7	38	18	64	12
19	39	9	61	32	44	6	50
40	20	62	10	43	31	49	5
30	42	8	52	17	37	11	63

Abb. 11.109: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 8$ (de Winkel)

In einem zweiten Beispiel werden für die Hilfsquadrate andere Parameter gewählt. Für das Hilfsquadrat A gilt

$$\begin{array}{cccccc} a_1 = 0 & a_2 = 0 & a_3 = 1 & a_4 = 1 & a_5 = 0 & a_6 = 1 \\ b_1 = 1 & b_2 = 0 & b_3 = 0 & b_4 = 1 & b_5 = 1 & b_6 = 0 \\ c_1 = 1 & c_2 = 1 & c_3 = 0 & c_4 = 1 & c_5 = 1 & c_6 = 1 \end{array}$$

und für das Hilfsquadrat B

$$\begin{array}{cccccc} a_1 = 1 & a_2 = 1 & a_3 = 1 & a_4 = 0 & a_5 = 1 & a_6 = 1 \\ b_1 = 0 & b_2 = 1 & b_3 = 1 & b_4 = 0 & b_5 = 0 & b_6 = 1 \\ c_1 = 1 & c_2 = 1 & c_3 = 0 & c_4 = 1 & c_5 = 1 & c_6 = 1 \end{array}$$

Damit ergeben sich die Hilfsquadrate aus Abbildung 11.110.

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	4	1	5	3	7	2	6
1	5	1	4	0	6	2	7	3
2	3	7	2	6	0	4	1	5
3	6	2	7	3	5	1	4	0
4	7	3	6	2	4	0	5	1
5	2	6	3	7	1	5	0	4
6	4	0	5	1	7	3	6	2
7	1	5	0	4	2	6	3	7

a) Hilfsquadrat A

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	6	7	1	5	3	2	4
1	7	1	0	6	2	4	5	3
2	5	3	2	4	0	6	7	1
3	2	4	5	3	7	1	0	6
4	1	7	6	0	4	2	3	5
5	6	0	1	7	3	5	4	2
6	4	2	3	5	1	7	6	0
7	3	5	4	2	6	0	1	7

b) Hilfsquadrat B

Abb. 11.110: Geordnete lateinische Hilfsquadrate

Bei diesen Parametern muss für das Hilfsquadrat B nur noch die Zeilen- und Spaltenpermutation

$$1 \quad 5 \quad 3 \quad 7 \quad 2 \quad 6 \quad 0 \quad 4$$

durchgeführt werden, während die Spiegelung an der Nebendiagonalen entfällt. Überlagert man die beiden Hilfsquadrate A und B, entsteht das bimagische Quadrat aus Abbildung 11.111.

	1	5	3	7	2	6	0	4
1	1	4	6	3	0	5	7	2
5	0	5	7	2	1	4	6	3
3	4	1	3	6	5	0	2	7
7	5	0	2	7	4	1	3	6
2	3	6	4	1	2	7	5	0
6	2	7	5	0	3	6	4	1
0	6	3	1	4	7	2	0	5
4	7	2	0	5	6	3	1	4

a) Spalten- und Zeilentransformation

2	37	15	44	25	62	24	51
41	14	40	3	50	21	63	28
29	58	20	55	6	33	11	48
54	17	59	32	45	10	36	7
60	31	53	18	35	8	46	9
19	56	30	57	12	47	5	34
39	4	42	13	64	27	49	22
16	43	1	38	23	52	26	61

b) bimagisches Quadrat

Abb. 11.111: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 8$ (de Winkel, Beispiel 2)

Insgesamt gibt Aale de Winkel auf seiner Webseite Parameter an, mit denen sich 80 unterschiedliche bimagische Quadrate erzeugen lassen. Aus jedem dieser bimagischen Quadrate lassen sich dann durch zusätzliche Spalten- und Zeilentranspositionen weitere bimagische Quadrate erzeugen.

11.1.11 De Winkel (Pandiagonale Quadrate)

Bei der Konstruktion von pandiagonalen bimagischen Quadraten der Ordnung 8 arbeitet Aale de Winkel mit sechs binären pandiagonalen Quadraten[24], bei denen jede Zeile, jeder Spalte und jede Diagonale vier Einsen und vier Nullen enthält.[25]

---

[24] Dieser Begriff wurde von Dwane Campbell geärgt, der damit aber keine bimagischen Quadrate erzeugt: siehe `http://magictesseract.com/`

[25] de Winkel [581]

0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0	0

a) Quadrat A

0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0	1	1

b) Quadrat B

0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0

c) Quadrat C

0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0

d) Quadrat D

1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0	1

e) Quadrat E

1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0

f) Quadrat F

Abb. 11.112: Binäre pandiagonale Quadrate

Er hat 108 Kombination dieser sechs Quadrate gefunden, mit denen sich pandiagonale magische Quadrate zusammensetzen lassen. Wählt man beispielsweise die Kombination

A C B E D F

dann wird Quadrat A mit 32 multipliziert, C mit 16, B mit 8, E mit 4, D mit 2 und F mit 1. Die sich mit diesen Multiplikationen ergebenden Quadrate sind in Abbildung 11.113 dargestellt.

0	0	0	0	32	32	32	32
32	32	32	32	0	0	0	0
0	0	0	0	32	32	32	32
32	32	32	32	0	0	0	0
0	0	0	0	32	32	32	32
32	32	32	32	0	0	0	0
0	0	0	0	32	32	32	32
32	32	32	32	0	0	0	0

a) Quadrat $32 \cdot A$

0	0	8	8	8	8	0	0
0	0	8	8	8	8	0	0
8	8	0	0	0	0	8	8
8	8	0	0	0	0	8	8
0	0	8	8	8	8	0	0
0	0	8	8	8	8	0	0
8	8	0	0	0	0	8	8
8	8	0	0	0	0	8	8

b) Quadrat $8 \cdot B$

0	16	0	16	0	16	0	16
16	0	16	0	16	0	16	0
16	0	16	0	16	0	16	0
0	16	0	16	0	16	0	16
16	0	16	0	16	0	16	0
0	16	0	16	0	16	0	16
0	16	0	16	0	16	0	16
16	0	16	0	16	0	16	0

c) Quadrat $16 \cdot C$

0	2	2	0	0	2	2	0
0	2	2	0	0	2	2	0
2	0	0	2	2	0	0	2
2	0	0	2	2	0	0	2
2	0	0	2	2	0	0	2
2	0	0	2	2	0	0	2
0	2	2	0	0	2	2	0
0	2	2	0	0	2	2	0

d) Quadrat $2 \cdot D$

4	0	4	0	0	4	0	4
0	4	0	4	4	0	4	0
0	4	0	4	4	0	4	0
4	0	4	0	0	4	0	4
4	0	4	0	0	4	0	4
0	4	0	4	4	0	4	0
0	4	0	4	4	0	4	0
4	0	4	0	0	4	0	4

e) Quadrat $4 \cdot E$

1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0

f) Quadrat $1 \cdot F$

Abb. 11.113: Multiplikation der binären pandiagonalen Quadrate mit Zweierpotenzen

Addiert man diese Quadrate und erhöht die sich ergebenden Summen um 1, entspricht das der Rechnung

$$32 \cdot A + 16 \cdot C + 8 \cdot B + 4 \cdot E + 2 \cdot D + F + 1$$

und man erhält man das pandiagonale bimagische Quadrat aus Abbildung 11.114.

6	20	15	25	42	64	35	53
49	39	60	46	29	11	24	2
28	14	17	7	56	34	61	43
47	57	38	52	3	21	10	32
23	1	30	12	59	45	50	40
36	54	41	63	16	26	5	19
9	31	4	22	37	51	48	58
62	44	55	33	18	8	27	13

Abb. 11.114: Pandiagonales bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 8$ (de Winkel, Beispiel 1)

Ein zweites Beispiel soll dieses Vorgehen noch einmal verdeutlichen. Die Kombination

$$F \quad E \quad D \quad B \quad A \quad C$$

führt zu der Rechnung

$$32 \cdot F + 16 \cdot E + 8 \cdot D + 4 \cdot B + 2 \cdot A + C + 1$$

und man erhält man das pandiagonale bimagische Quadrat aus Abbildung 11.115.

49	42	29	6	39	64	11	20
4	27	48	55	22	13	58	33
46	53	2	25	60	35	24	15
31	8	51	44	9	18	37	62
26	1	54	45	16	23	36	59
43	52	7	32	61	38	17	10
5	30	41	50	19	12	63	40
56	47	28	3	34	57	14	21

Abb. 11.115: Pandiagonales bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 8$ (de Winkel, Beispiel 2)

Ebenso wie das erste Beispiel enthält das pandiagonale bimagische Quadrat trimagische Diagonalen. Insgesamt führt Aale de Winkel auf seiner Webseite 108 Kombinationen der sechs Ausgangsquadrate auf, mit denen sich pandiagonale bimagische Quadrate erzeugen lassen.

11.1.12 Lamb

Um pandiagonale bimagische Quadrate der Ordnung 8 zu erzeugen, geht Gil Lamb[26] von einem magischen Rechteck aus

1	6	7	4
8	3	2	5

und füllt zunächst den linken oberen Quadranten eines Hilfsquadrates A. In die obere Zeile dieses Quadranten werden die Zahlen aus der oberen Zeile des magischen Rechtecks eingetragen und darunter diese Zahlen in umgekehrter Reihenfolge. Beide Zeilen werden dann in die beiden noch leeren Zeilen darunter übertragen, wobei die Zahlen in den einzelnen Zahlenpaaren vertauscht werden.

1	6	7	4

1	6	7	4
4	7	6	1

1	6	7	4
4	7	6	1
6	1	4	7

1	6	7	4
4	7	6	1
6	1	4	7
7	4	1	6

Abb. 11.116: Hilfsquadrat A: Füllen des linken oberen Quadranten

[26] Arbeitsblatt einer Tabellenkalkulation aus einer privaten Kommunikation

Der vollständig gefüllte Quadrant wird anschließend in den rechten oberen Quadranten kopiert. Danach werden die Zahlen der beiden Quadranten in die untere Hälfte übertragen, wobei alle Zahlen z durch ihre zu $n+1=9$ komplementäre Zahlen $9-z$ ersetzt werden. Als Ergebnis erhält man das Hilfsquadrat A in Abbildung 11.117.

1	6	7	4				
4	7	6	1				
6	1	4	7				
7	4	1	6				

1	6	7	4	1	6	7	4
4	7	6	1	4	7	6	1
6	1	4	7	6	1	4	7
7	4	1	6	7	4	1	6

1	6	7	4	1	6	7	4
4	7	6	1	4	7	6	1
6	1	4	7	6	1	4	7
7	4	1	6	7	4	1	6
8	3	2	5	8	3	2	5
5	2	3	8	5	2	3	8
3	8	5	2	3	8	5	2
2	5	8	3	2	5	8	3

Abb. 11.117: Hilfsquadrat A

Das zweite Hilfsquadrat B wird etwas komplizierter gefüllt, wobei zunächst wieder nur Zahlen in den linken oberen Quadranten eingetragen werden. In die linke Spalte werden die Zahlen aus der unteren Rechteckzeile eingetragen, wobei allerdings zuerst die rechte Zahlenpaar 2 und 5 und dann das linke Zahlenpaar 8 und 3 übertragen wird.

In die zweite Spalte werden die Zahlen aus der oberen Rechteckzeile eingetragen, die allerdings in beiden Hälften paarweise vertauscht werden. so dass die einzutragenden Zahlen 6 und 1 sowie 4 und 7 lauten. In die dritte Spalte werden die Zahlen aus der oberen Rechteckzeile in umgekehrter Reihenfolge 4, 7, 6 und 1 eingetragen, während die Zahlen aus der unteren Rechteckzeile in normaler Reihenfolge in die letzte Spalte eingetragen werden.

2			
5			
8			
3			

2	6		
5	1		
8	4		
3	7		

2	6	4	
5	1	7	
8	4	6	
3	7	1	

2	6	4	8
5	1	7	3
8	4	6	2
3	7	1	5

Abb. 11.118: Hilfsquadrat B: Füllen des linken oberen Quadranten

Der vollständig gefüllte Quadrant wird dann in den linken unteren Quadranten des Hilfsquadrates kopiert. Anschließend werden die Zahlen dieser beiden Quadranten in die rechte Hälfte des Hilfsquadrates übertragen, wobei wieder alle Zahlen z durch ihre Komplemente $9-z$ ersetzt werden. Das vollständig gefüllte Hilfsquadrat B ist in Abbildung 11.119 dargestellt.

2	6	4	8				
5	1	7	3				
8	4	6	2				
3	7	1	5				

2	6	4	8				
5	1	7	3				
8	4	6	2				
3	7	1	5				
2	6	4	8				
5	1	7	3				
8	4	6	2				
3	7	1	5				

2	6	4	8	7	3	5	1
5	1	7	3	4	8	2	6
8	4	6	2	1	5	3	7
3	7	1	5	6	2	8	4
2	6	4	8	7	3	5	1
5	1	7	3	4	8	2	6
8	4	6	2	1	5	3	7
3	7	1	5	6	2	8	4

Abb. 11.119: Hilfsquadrat B

Wenn man abschließend die beiden Hilfsquadrate A und B überlagert und für jede Zelle die Rechnung

$$8 \cdot (A - 1) + B$$

durchführt, entsteht das pandiagonale bimagische Quadrat mit trimagischen Diagonalen, das in Abbildung 11.120 dargestellt ist.

2	46	52	32	7	43	53	25
29	49	47	3	28	56	42	6
48	4	30	50	41	5	27	55
51	31	1	45	54	26	8	44
58	22	12	40	63	19	13	33
37	9	23	59	36	16	18	62
24	60	38	10	17	61	35	15
11	39	57	21	14	34	64	20

Abb. 11.120: Pandiagonales bimagisches Quadrat (Lamb)

Da dieses bimagische Quadrat weitere gebrochene Diagonalen aufweist, deren bimagische Summe ebenfalls 11 180 beträgt, können aus dem Quadrat der Abbildung 11.120 durch Zeilen- und Spaltenverschiebungen weitere pandiagonale bimagische Quadrate erzeugt werden. In Abbildung 11.121 sind zwei dieser Quadrate dargestellt.

45	31	1	51	44	26	8	54
3	49	47	29	6	56	42	28
50	4	30	48	55	5	27	41
32	46	52	2	25	43	53	7
21	39	57	11	20	34	64	14
59	9	23	37	62	16	18	36
10	60	38	24	15	61	35	17
40	22	12	58	33	19	13	63

63	22	12	33	58	19	13	40
28	49	47	6	29	56	42	3
41	4	30	55	48	5	27	50
14	39	57	20	11	34	64	21
7	46	52	25	2	43	53	32
36	9	23	62	37	16	18	59
17	60	38	15	24	61	35	10
54	31	1	44	51	26	8	45

Abb. 11.121: Weitere pandiagonale bimagische Quadrat durch Zeilen-Spalten-Transformationen (Lamb)

Weitere pandiagonale bimagische Quadrate lassen sich erzeugen, wenn man andere magische Rechtecke wählt. Mit dem Rechteck

5	8	3	2
4	1	6	7

ergeben sich beispielsweise die Hilfsquadrate A und B sowie das pandiagonale bimagische Quadrat aus Abbildung 11.122.

5	8	3	2	5	8	3	2
2	3	8	5	2	3	8	5
8	5	2	3	8	5	2	3
3	2	5	8	3	2	5	8
4	1	6	7	4	1	6	7
7	6	1	4	7	6	1	4
1	4	7	6	1	4	7	6
6	7	4	1	6	7	4	1

a) Hilfsquadrat A

6	8	2	4	3	1	7	5
7	5	3	1	2	4	6	8
4	2	8	6	5	7	1	3
1	3	5	7	8	6	4	2
6	8	2	4	3	1	7	5
7	5	3	1	2	4	6	8
4	2	8	6	5	7	1	3
1	3	5	7	8	6	4	2

b) Hilfsquadrat B

38	64	18	12	35	57	23	13
15	21	59	33	10	20	62	40
60	34	16	22	61	39	9	19
17	11	37	63	24	14	36	58
30	8	42	52	27	1	47	53
55	45	3	25	50	44	6	32
4	26	56	46	5	31	49	43
41	51	29	7	48	54	28	2

c) bimagisches Quadrat

Abb. 11.122: Pandiagonales bimagisches Quadrat (Lamb)

11.1.13 Transformationen von bimagischen Quadraten

Man weiß schon lange, dass ein magisches Quadrat magisch bleibt, wenn man jede Zahl durch ihre komplementäre Zahl ersetzt. Diese Eigenschaft bleibt auch bei bimagischen Quadraten erhalten, so dass man durch diese Transformation ein neues bimagisches Quadrat erzeugen kann.

1	8	46	43	53	52	26	31
22	19	57	64	34	39	13	12
58	33	21	14	20	11	63	40
16	60	35	23	9	61	38	18
55	29	28	50	48	6	3	41
27	47	56	4	30	42	49	5
45	54	2	25	7	32	44	51
36	10	15	37	59	17	24	62

a) bimagisches Quadrat

64	57	19	22	12	13	39	34
43	46	8	1	31	26	52	53
7	32	44	51	45	54	2	25
49	5	30	42	56	4	27	47
10	36	37	15	17	59	62	24
38	18	9	61	35	23	16	60
20	11	63	40	58	33	21	14
29	55	50	28	6	48	41	3

b) komplementäres Quadrat

Abb. 11.123: Komplementäres bimagisches Quadrat

Betrachtet man die beiden Quadrate, fällt auf, dass alle Zahlen der markierten Zeile in Abbildung 11.124a wieder in einer Zeile des komplementären Quadrates liegen. In diesem Beispiel gilt das nicht nur für die markierte Zeile, sondern für alle acht Zeilen.

Diese Eigenschaft trifft in diesem Beispiel aber für keine einzige Spalte zu. Wie in Abbildung 11.124b erkennen ist, liegen die Zahlen dieser Spalte sehr verstreut im komplementären Quadrat.

1	8	46	43	53	52	26	31
22	19	57	64	34	39	13	12
58	33	21	14	20	11	63	40
16	60	35	23	9	61	38	18
55	29	28	50	48	6	3	41
27	47	56	4	30	42	49	5
45	54	2	25	7	32	44	51
36	10	15	37	59	17	24	62

a) bimagiches Ausgangsquadrat

64	57	19	22	12	13	39	34
43	46	8	1	31	26	52	53
7	32	44	51	45	54	2	25
49	5	30	42	56	4	27	47
10	36	37	15	17	59	62	24
38	18	9	61	35	23	16	60
20	11	63	40	58	33	21	14
29	55	50	28	6	48	41	3

b) komplementäres Quadrat

Abb. 11.124: Transformation einer Zeile und einer Spalte

Bei einigen speziellen bimagischen Quadraten bleiben die Zahlen der Zeilen und Spalten des Ausgangsquadrates im komplementären Quadrat erhalten, auch wenn sie dort eine andere relative Reihenfolge aufweisen.

Rilly nennt diese Eigenschaft *autokomplementär*, da man dieses Quadrat durch Vertauschen von Zeilen und Spalten wieder in das Ausgangsquadrat zurück verwandeln kann.[27]

1	7	61	38	40	32	46	35
37	23	26	10	62	45	51	6
13	11	36	63	18	22	41	56
54	52	47	43	29	2	9	24
34	44	50	5	53	17	8	49
21	31	12	48	15	60	16	57
58	64	25	33	4	27	30	19
42	28	3	20	39	55	59	14

a) bimagiches Ausgangsquadrat

64	58	4	27	25	33	19	30
28	42	39	55	3	20	14	59
52	54	29	2	47	43	24	9
11	13	18	22	36	63	56	41
31	21	15	60	12	48	57	16
44	34	53	17	50	5	49	8
7	1	40	32	61	38	35	46
23	37	62	45	26	10	6	51

b) autokomplementäres Quadrat

Abb. 11.125: Autokomplementäres bimagisches Quadrat

Spezielle Transformationen

Weitere Transformationen sind mit speziellen bimagischen Quadraten der Ordnung $n = 8$ möglich, wenn die für die Zeilen, Spalten und Diagonalen benutzten bimagischen Reihen eine bestimmte Eigenschaft erfüllen. Es ist bekannt, dass alle 38 039 bimagischen Reihen dieser Ordnung aus jeweils vier geraden und ungeraden Zahlen bestehen müssen.

Bei den vier geraden Zahlen treten als Summen immer Vielfache von vier zwischen 60 und 200 auf. Ergibt die Summe der geraden Zahlen in allen 18 bimagischen Reihen den Wert 132, sind weitere Transformationen von bimagischen Quadraten möglich. Daher bezeichnet man diese bimagischen Quadrate manchmal auch als *Gruppe 132*.

[27] Rilly [476] S. 43 – 44

Dass diese Eigenschaft etwas besonderes ist, sieht man an den beiden Beispielen in Abbildung 11.126. Im linken Beispiel besitzen zwar die geraden Zahlen in den Zeilen und Spalten die Summe 132, aber die beiden Diagonalen weichen mit den Summen 68 bzw. 196 hiervon ab. Im rechten Beispiel besitzen dagegen alle geraden Zahlen in den Zeilen, Summen und Diagonalen die Summe 132, allerdings sind nur vier dieser Reihen in der Abbildung markiert.

50	9	23	48	59	4	30	37
19	44	54	13	26	33	63	8
64	7	25	34	53	14	20	43
29	38	60	3	24	47	49	10
6	61	35	28	15	56	42	17
39	32	2	57	46	21	11	52
12	51	45	22	1	58	40	31
41	18	16	55	36	27	5	62

a) Summen 68, 132 und 196

9	53	8	60	47	19	34	30
7	59	10	54	33	29	48	20
44	24	37	25	14	50	3	63
38	26	43	23	4	64	13	49
18	46	31	35	56	12	57	5
32	36	17	45	58	6	55	11
51	15	62	2	21	41	28	40
61	1	52	16	27	39	22	42

b) alle Summen betragen 132

Abb. 11.126: Summen der geraden Zahlen in den Zeilen, Spalten und Diagonalen

Für die bimagischen Quadrate der Gruppe 132 sind weitere sechs zusätzliche Transformationen möglich, die jeweils ein neues bimagisches Quadrat erzeugen.[28] Alle Transformationen unterscheiden dabei gerade und ungerade Zahlen, die getrennt voneinander behandelt werden.

1. Ersetze die ungeraden Zahlen durch ihre zu 64 komplementäre Zahl und lasse die geraden Zahlen unverändert.

1	8	53	31	26	52	43	46
15	10	61	33	40	60	19	22
38	21	32	4	51	47	58	9
20	35	42	54	5	25	16	63
30	45	34	12	59	17	56	7
44	27	24	62	13	39	2	49
55	50	3	41	48	6	29	28
57	64	11	23	18	14	37	36

a) Ausgangsquadrat

63	8	11	33	26	52	21	46
49	10	3	31	40	60	45	22
38	43	32	4	13	17	58	55
20	29	42	54	59	39	16	1
30	19	34	12	5	47	56	57
44	37	24	62	51	25	2	15
9	50	61	23	48	6	35	28
7	64	53	41	18	14	27	36

b) transformiertes Quadrat

Abb. 11.127: Transformation 1

Die entstehenden bimagischen Quadrate sind immer vom Ausgangsquadrat verschieden und können durch keinerlei Vertauschungen wieder auf dieses zurück transformiert werden.

[28] Rilly [476] S. 44 – 48

2. Ersetze die geraden Zahlen durch ihre zu 66 komplementäre Zahl und lasse die ungeraden Zahlen unverändert.

2	7	54	32	25	51	44	45
16	9	62	34	39	59	20	21
37	22	31	3	52	48	57	10
19	36	41	53	6	26	15	64
29	46	33	11	60	18	55	8
43	28	23	61	14	40	1	50
56	49	4	42	47	5	30	27
58	63	12	24	17	13	38	35

a) Ausgangsquadrat

64	7	12	34	25	51	22	45
50	9	4	32	39	59	46	21
37	44	31	3	14	18	57	56
19	30	41	53	60	40	15	2
29	20	33	11	6	48	55	58
43	38	23	61	52	26	1	16
10	49	62	24	47	5	36	27
8	63	54	42	17	13	28	35

b) transformiertes Quadrat

Abb. 11.128: Transformation 2

Auch bei dieser Transformation sind die entstehenden Quadrate vom Ausgangsquadrat verschieden.

3. Ersetze die geraden Zahlen durch ihre zu 66 komplementäre und die ungeraden Zahlen durch ihre zu 64 komplementäre Zahl.

3	57	34	28	14	47	56	21
41	12	19	50	63	5	30	40
48	13	22	55	58	4	27	33
6	64	39	29	11	42	49	20
52	23	16	43	37	25	2	62
31	35	60	8	17	54	45	10
26	38	61	1	24	51	44	15
53	18	9	46	36	32	7	59

a) Ausgangsquadrat

61	7	32	38	52	17	10	43
23	54	45	16	1	59	36	26
18	51	44	9	8	62	37	31
60	2	25	35	53	24	15	46
14	41	50	21	27	39	64	4
33	29	6	58	47	12	19	56
40	28	3	63	42	13	22	49
11	48	55	20	30	34	57	5

b) transformiertes Quadrat

Abb. 11.129: Transformation 3

Bei dieser Transformation können die beiden Quadrate wie in Abbildung 11.129 verschieden oder wie in Abbildung 11.130 gleich sein. Dann kann man die Zeilen und Spalten so vertauschen, dass wieder das Ausgangsquadrat entsteht.

3	4	54	53	32	31	41	42
21	15	57	35	10	20	38	64
16	22	36	58	19	9	63	37
26	25	47	48	5	6	52	51
34	33	23	24	61	62	12	11
56	46	28	2	43	49	7	29
45	55	1	27	50	44	30	8
59	60	14	13	40	39	17	18

a) Ausgangsquadrat

61	62	12	11	34	33	23	24
43	49	7	29	56	46	28	2
50	44	30	8	45	55	1	27
40	39	17	18	59	60	14	13
32	31	41	42	3	4	54	53
10	20	38	64	21	15	57	35
19	9	63	37	16	22	36	58
5	6	52	51	26	25	47	48

b) transformiertes Quadrat

Abb. 11.130: Transformation 3 (gleiche Quadrate)

4. Ersetze die geraden Zahlen durch ihre zu 65 komplementäre Zahl und erhöhe die ungeraden Zahlen um 1.

4	3	53	54	31	32	42	41
22	16	58	36	9	19	37	63
15	21	35	57	20	10	64	38
25	26	48	47	6	5	51	52
33	34	24	23	62	61	11	12
55	45	27	1	44	50	8	30
46	56	2	28	49	43	29	7
60	59	13	14	39	40	18	17

a) Ausgangsquadrat

61	4	54	11	32	33	23	42
43	49	7	29	10	20	38	64
16	22	36	58	45	55	1	27
26	39	17	48	59	6	52	13
34	31	41	24	3	62	12	53
56	46	28	2	21	15	57	35
19	9	63	37	50	44	30	8
5	60	14	51	40	25	47	18

b) transformiertes Quadrat

Abb. 11.131: Transformation 4

Auch bei dieser Transformation können unterschiedliche oder gleiche bimagische Quadrate entstehen.

4	26	54	48	41	51	31	5
46	15	35	2	21	56	28	57
32	61	17	52	11	42	6	39
50	8	44	30	55	1	45	27
37	19	63	9	36	22	58	16
25	60	24	53	14	47	3	34
7	38	10	43	64	29	49	20
59	33	13	23	18	12	40	62

a) Ausgangsquadrat

61	39	11	17	42	52	32	6
19	16	36	63	22	9	37	58
33	62	18	13	12	23	59	40
15	57	21	35	56	2	46	28
38	20	64	10	29	43	7	49
26	5	41	54	51	48	4	31
8	27	55	44	1	30	50	45
60	34	14	24	47	53	25	3

b) transformiertes Quadrat

Abb. 11.132: Transformation 4 (gleiche Quadrate)

5. Ersetze die ungeraden Zahlen durch ihre zu 65 komplementäre Zahl und vermindere die geraden Zahlen um 1.

5	20	55	62	34	43	16	25
27	14	36	41	53	64	18	7
35	54	17	28	8	13	42	63
10	31	45	40	60	49	3	22
24	1	58	51	47	38	29	12
61	44	6	15	19	26	56	33
50	39	32	21	9	4	59	46
48	57	11	2	30	23	37	52

a) Ausgangsquadrat

60	19	10	61	33	22	15	40
38	13	35	24	12	63	17	58
30	53	48	27	7	52	41	2
9	34	20	39	59	16	62	21
23	64	57	14	18	37	36	11
4	43	5	50	46	25	55	32
49	26	31	44	56	3	6	45
47	8	54	1	29	42	28	51

b) transformiertes Quadrat

Abb. 11.133: Transformation 5

In Abbildung 11.134 ist wieder ein Beispiel angegeben, wo das transformierte Quadrat wieder in das Ausgangsquadrat überführt werden kann.

5	4	46	57	39	32	50	27
36	9	53	14	64	43	23	18
54	51	24	47	29	10	1	44
19	58	15	28	6	61	40	33
63	22	35	56	42	17	12	13
26	31	60	3	49	38	45	8
16	37	25	34	20	7	59	62
41	48	2	21	11	52	30	55

a) Ausgangsquadrat

60	3	45	8	26	31	49	38
35	56	12	13	63	22	42	17
53	14	23	18	36	9	64	43
46	57	50	27	5	4	39	32
2	21	30	55	41	48	11	52
25	34	59	62	16	37	20	7
15	28	40	33	19	58	6	61
24	47	1	44	54	51	29	10

b) transformiertes Quadrat

Abb. 11.134: Transformation 5 (gleiche Quadrate)

6. Erhöhe die ungeraden Zahlen um 1 und vermindere die geraden Zahlen um 1.

6	42	52	32	47	25	3	53
41	29	7	51	38	12	18	64
15	59	33	21	4	46	56	26
36	16	22	58	9	63	37	19
17	39	61	11	60	24	14	34
28	54	48	2	23	35	57	13
62	20	10	40	49	5	31	43
55	1	27	45	30	50	44	8

a) Ausgangsquadrat

5	41	51	31	48	26	4	54
42	30	8	52	37	11	17	63
16	60	34	22	3	45	55	25
35	15	21	57	10	64	38	20
18	40	62	12	59	23	13	33
27	53	47	1	24	36	58	14
61	19	9	39	50	6	32	44
56	2	28	46	29	49	43	7

b) transformiertes Quadrat

Abb. 11.135: Transformation 6

Bei dieser Transformation existieren einige Quadrate, bei denen man aus dem transformierten Quadrat durch das Vertauschen von Zeilen und Spalten wieder das Ausgangsquadrat erhält.

6	3	25	32	47	42	52	53
28	29	7	2	49	56	46	43
62	59	33	40	23	18	12	13
36	37	63	58	9	16	22	19
17	24	14	11	60	61	39	34
15	10	20	21	38	35	57	64
41	48	54	51	4	5	31	26
55	50	44	45	30	27	1	8

a) Ausgangsquadrat

5	4	26	31	48	41	51	54
27	30	8	1	50	55	45	44
61	60	34	39	24	17	11	14
35	38	64	57	10	15	21	20
18	23	13	12	59	62	40	33
16	9	19	22	37	36	58	63
42	47	53	52	3	6	32	25
56	49	43	46	29	28	2	7

b) transformiertes Quadrat

Abb. 11.136: Transformation 6 (gleiche Quadrate)

11.1.14 Normieren von bimagischen Quadraten

Walter Trump und Francis Gaspalou haben im April 2014 alle bimagischen Quadrate der Ordnung $n = 8$ bestimmt.[29] Um die erhaltenen Quadrate vergleichen und unterscheiden zu können, haben sie diese Quadrate besonders normiert.[30]

32	38	3	10	57	52	21	47
7	61	28	17	34	43	14	56
53	15	42	35	20	25	64	6
36	26	63	54	5	16	41	19
46	24	49	60	11	2	39	29
59	1	40	45	30	23	50	12
9	51	22	31	48	37	4	58
18	44	13	8	55	62	27	33

Abb. 11.137: Bimagisches Ausgangsquadrat

Zu Beginn des Prozesses sucht man die kleinste Zahl auf den beiden Diagonalen und verschiebt diese Zahl in die linke obere Ecke, indem man die zugehörigen Zeilen und Spalten austauscht. Befindet sich die Zahl allerdings schon in einer der Ecken, reicht eine einfache Spiegelung oder Drehung aus. In diesem

[29] siehe Kapitel 11.1.15
[30] Gaspalou [156]

Beispiel wird die Zahl 4 in die linke obere Ecke platziert.

32	38	3	10	57	52	21	47
7	61	28	17	34	43	14	56
53	15	42	35	20	25	64	6
36	26	63	54	5	16	41	19
46	24	49	60	11	2	39	29
59	1	40	45	30	23	50	12
9	51	22	31	48	37	4	58
18	44	13	8	55	62	27	33

4	58	22	31	48	37	9	51
27	33	13	8	55	62	18	44
64	6	42	35	20	25	53	15
41	19	63	54	5	16	36	26
39	29	49	60	11	2	46	24
50	12	40	45	30	23	59	1
21	47	3	10	57	52	32	38
14	56	28	17	34	43	7	61

Abb. 11.138: Verschieben der kleinsten Zahl der Diagonalen in die linke obere Ecke

Für die weiteren Schritte werden die Zellen der Nebendiagonalen von links oben nach rechts unten der Reihe nach mit A1, B2, C3, D4, E5, F6, G7 und H8 bezeichnet. Da die Zahlen auf Diagonalen von der linken oberen Ecke ausgehend größer werden sollen, wird zunächst die Zahl in Zelle B2 mit der Zahl in G7 verglichen. Die kleinere Zahl soll sich in Zelle B2 befinden, so dass wie in diesem Fall die zugehörigen Zeilen und Spalten vertauscht werden müssen.

A1							
	B2						
		C3					
			D4				
				E5			
					F6		
						G7	
							H8

4	9	22	31	48	37	58	51
21	32	3	10	57	52	47	38
64	53	42	35	20	25	6	15
41	36	63	54	5	16	19	26
39	46	49	60	11	2	29	24
50	59	40	45	30	23	12	1
27	18	13	8	55	62	33	44
14	7	28	17	34	43	56	61

Abb. 11.139: Austausch der Zahlen in den Zellen B2 und G7

Im nächsten Schritt werden die Zahlen in den Zellen C3 und F6 verglichen. Auch hier muss sich die kleinere Zahl in C3 befinden.

Ebenso wird mit den Zahlen in den Zellen D4 und E5 verfahren. Auch hier muss die kleinere Zahl bei Bedarf durch Vertauschen von Zeilen und Spalten in die Zelle D4 verschoben werden.

4	9	37	31	48	22	58	51
21	32	52	10	57	3	47	38
50	59	23	45	30	40	12	1
41	36	16	54	5	63	19	26
39	46	2	60	11	49	29	24
64	53	25	35	20	42	6	15
27	18	62	8	55	13	33	44
14	7	43	17	34	28	56	61

4	9	37	48	31	22	58	51
21	32	52	57	10	3	47	38
50	59	23	30	45	40	12	1
39	46	2	11	60	49	29	24
41	36	16	5	54	63	19	26
64	53	25	20	35	42	6	15
27	18	62	55	8	13	33	44
14	7	43	34	17	28	56	61

Abb. 11.140: Anordnung der Zahlen in den Zellen C3 und F6 sowie D4 und E5

Mit diesen Schritten befinden sich die vier kleineren Zahlen in der oberen und die vier größeren Zahlen in der unteren Hälfte der Diagonalen. Da die oberen vier Zahlen der Diagonale aufsteigend vorliegen sollen, müssen jetzt noch die Zahlen der Zellen B2, C3 und D4 in diese Reihenfolge gebracht werden. In diesem Beispiel müssen die Zahlen 32 und 11 in den Zellen B2 und D4 vertauscht werden. Ein Zeilentausch der zugehörigen zwei Zeilen und zwei Spalten reicht hier aber nicht aus, da dadurch die zweite Diagonale zerstört werden würde. Daher müssen auch die symmetrisch liegenden Zeilen und Spalten zusätzlich vertauscht werden.

4	48	37	9	31	22	58	51
39	11	2	46	60	49	29	24
50	30	23	59	45	40	12	1
21	57	52	32	10	3	47	38
41	5	16	36	54	63	19	26
64	20	25	53	35	42	6	15
27	55	62	18	8	13	33	44
14	34	43	7	17	28	56	61

4	48	37	9	58	22	31	51
39	11	2	46	29	49	60	24
50	30	23	59	12	40	45	1
21	57	52	32	47	3	10	38
27	55	62	18	33	13	8	44
64	20	25	53	6	42	35	15
41	5	16	36	19	63	54	26
14	34	43	7	56	28	17	61

Abb. 11.141: Die linke obere Hälfte der Diagonalen in aufsteigender Reihenfolge

Jetzt kann es aber noch passieren, dass die Zahl in Zelle D4 wieder größer als die Zahl in Zelle E5 ist. Dann müssten die zugehörigen Zeilen und Spalten vertauscht werden. In diesem Beispiel gilt aber bereits $32 < 33$, so dass dieser Schritt hier nicht notwendig ist.

In einem letzten Schritt wird das Quadrat noch so transformiert, dass die Zahl in der rechten oberen Ecke kleiner als die Zahl in der linken unteren Ecke ist. In diesem Beispiel ist die Zahl in der rechten oberen Ecke mit $51 > 14$ allerdings größer, so dass das Quadrat noch an der Nebendiagonalen gespiegelt werden muss.

4	39	50	21	27	64	41	14
48	11	30	57	55	20	5	34
37	2	23	52	62	25	16	43
9	46	59	32	18	53	36	7
58	29	12	47	33	6	19	56
22	49	40	3	13	42	63	28
31	60	45	10	8	35	54	17
51	24	1	38	44	15	26	61

Abb. 11.142: Normiertes bimagisches Quadrat

Aus diesem normierten bimagischen Quadrat können durch Zeilen- und Spaltentransformationen wie in Abbildung 11.143 insgesamt 192 unterschiedliche bimagische Quadrate erzeugt werden. Durch Spiegelungen und Drehungen erhöht sich diese Zahl dann auf $192 \cdot 8 = 1536$.

4	41	50	21	27	64	39	14
31	54	45	10	8	35	60	17
37	16	23	52	62	25	2	43
9	36	59	32	18	53	46	7
58	19	12	47	33	6	29	56
22	63	40	3	13	42	49	28
48	5	30	57	55	20	11	34
51	26	1	38	44	15	24	61

4	41	64	21	27	50	39	14
31	54	35	10	8	45	60	17
22	63	42	3	13	40	49	28
9	36	53	32	18	59	46	7
58	19	6	47	33	12	29	56
37	16	25	52	62	23	2	43
48	5	20	57	55	30	11	34
51	26	15	38	44	1	24	61

Abb. 11.143: Transformierte bimagische Quadrate

Diese Methode zur Normierung von bimagischen Quadraten der Ordnung $n = 8$ ist eine spezielle Form der allgemeineren LDR-Darstellung[31], mit der Quadrate beliebiger Ordnung normiert werden.

11.1.15 Anzahl bimagischer Quadrate

Im April 2014 haben Walter Trump und Francis Gaspalou alle bimagischen Quadrate der Ordnung $n = 8$ bestimmt.[32] Sie fanden 136 244 bimagische Quadrate in einer normierten Form.[33]

Aus jedem dieser Quadrate lassen sich durch Zeilen-Spalten-Transformationen insgesamt $8\,!! = 384$ Quadrate erzeugen. Jedoch lassen sich jeweils zwei von ihnen durch Spiegelungen oder Drehungen ineinander überführen. Somit lassen sich aus einem Quadrat der normierten Form insgesamt 192 unterschiedliche Quadrate erzeugen.[34]

Damit beläuft sich die Anzahl unterschiedlicher bimagischer Quadrate der Ordnung $n = 8$ auf

$$192 \cdot 136\,244 = 26\,158\,848$$

[31] siehe Kapitel 18.6
[32] Trump [554]
[33] siehe Kapitel 11.1.14
[34] Trump [557]

unterschiedliche bimagische Quadrate.

Da auf der Webseite von Walter Trump viele weitere Untersuchungen zu diesen Quadraten dokumentiert sind, sollen hier nur einige besonders interessante Quadrate vorgestellt werden. Alle aufgeführten Anzahlen beziehen sich dabei auf die normierten Quadrate.

Es existieren 841 symmetrische bimagische Quadrate, von denen 20 diagonale Euler-Quadrate sind.

1	20	16	61	53	40	37	32
26	18	43	62	51	41	6	13
42	50	21	31	48	7	56	5
35	57	10	27	29	2	46	54
11	19	63	36	38	55	8	30
60	9	58	17	34	44	15	23
52	59	24	14	3	22	47	39
33	28	25	12	4	49	45	64

a) symmetrisch

2	23	57	48	52	37	11	30
25	16	34	55	43	62	20	5
46	59	21	4	32	9	39	50
53	36	14	27	7	18	64	41
24	1	47	58	38	51	29	12
15	26	56	33	61	44	6	19
60	45	3	22	10	31	49	40
35	54	28	13	17	8	42	63

b) symmetrisches diag. Euler-Quadrat

Abb. 11.144: Symmetrische bimagische Quadrate

836 bimagische Quadrate der normierten Form sind pandiagonal. Unter ihnen befinden sich wiederum 20 diagonale Euler-Quadrate.

3	36	22	39	48	61	42	9
52	21	6	24	27	49	18	63
46	55	40	7	53	34	5	20
35	33	51	50	8	1	54	28
17	4	23	56	62	29	43	26
38	16	47	2	13	44	59	41
12	31	60	45	19	10	25	58
57	64	11	37	30	32	14	15

a) pandiagonal

4	26	43	49	38	64	13	23
21	15	62	40	51	41	28	2
58	36	17	11	32	6	55	45
47	53	8	30	9	19	34	60
27	1	52	42	61	39	22	16
14	24	37	63	44	50	3	25
33	59	10	20	7	29	48	54
56	46	31	5	18	12	57	35

b) pandiagonales diag. Euler-Quadrat

Abb. 11.145: Pandiagonale bimagische Quadrate

Insgesamt existieren 923 bimagische Euler-Quadrate und 472 bimagische diagonale Euler-Quadrate.

5	54	35	16	20	63	42	25
62	13	8	43	55	28	17	34
27	44	18	61	33	14	56	7
36	19	53	26	6	41	15	64
10	57	31	52	48	3	37	22
49	2	60	23	11	40	30	45
24	39	46	1	29	50	59	12
47	32	9	38	58	21	4	51

a) normales Euler-Quadrat

6	33	56	19	61	26	15	44
45	10	31	60	22	49	40	3
23	52	37	2	48	11	30	57
64	27	14	41	7	36	53	18
12	47	58	29	51	24	1	38
35	8	17	54	28	63	42	13
25	62	43	16	34	5	20	55
50	21	4	39	9	46	59	32

b) diagonales Euler-Quadrat

Abb. 11.146: Bimagische Euler-Quadrate

34 der bimagischen Quadrate besitzen ein eingebettetes magisches Quadrat der Ordnung 4 und 108 weitere bimagische Quadrate besitzen sogar zwei eingebettete magische Quadrate mit unterschiedlichen magischen Summen. Die magischen Summen der eingebetteten Quadrate in Abbildung 11.147 lauten 162 bzw. 98.

4	37	42	15	22	51	64	25
43	14	1	40	61	28	23	50
58	31	20	53	48	9	6	35
17	56	59	30	7	34	45	12
55	18	29	60	33	8	11	46
32	57	54	19	10	47	36	5
13	44	39	2	27	62	49	24
38	3	16	41	52	21	26	63

58	31	20	53
17	56	59	30
55	18	29	60
32	57	54	19

48	9	6	35
7	34	45	12
33	8	11	46
10	47	36	5

Abb. 11.147: Bimagisches Quadrat mit eingebetteten Quadraten

Bei dem bimagischen Quadrat in Abbildung 11.148 sind zwei magische Quadrate mit den Summen 134 bzw. 126 eingebettet.

3	63	13	49	38	26	44	24
52	16	62	2	21	41	27	39
32	36	18	46	57	5	55	11
47	19	33	29	10	54	8	60
6	58	12	56	35	31	45	17
53	9	59	7	20	48	30	34
25	37	23	43	64	4	50	14
42	22	40	28	15	51	1	61

12	56	35	31
59	7	20	48
23	43	64	4
40	28	15	51

13	49	38	26
62	2	21	41
18	46	57	5
33	29	10	54

Abb. 11.148: Bimagisches Quadrat mit eingebetteten Quadraten

Addiert man die Zahlen in den vier Quadranten, ergibt sich bei 12 725 Quadraten jeweils die gleiche Summe 520. Bei 2638 dieser Quadrate stimmen auch die quadrierten Zahlen in den Quadranten jeweils überein. Dabei ergibt sich immer die Summe 22 360.

7	40	53	38	50	49	4	19
45	20	10	32	5	46	63	39
58	56	23	1	21	27	26	48
6	37	35	57	18	8	47	52
25	29	14	24	62	36	9	61
34	3	64	54	31	33	28	13
55	15	44	11	22	59	42	12
30	60	17	43	51	2	41	16

8	28	45	36	53	9	61	20
40	13	30	63	1	46	24	43
56	55	17	23	18	12	57	22
48	5	34	33	59	15	14	52
49	26	62	41	42	27	6	7
3	38	19	10	39	60	44	47
35	64	2	50	32	37	29	11
21	31	51	4	16	54	25	58

Abb. 11.149: Quadrate mit gleichen Summen und quadrierten Summen in den Quadranten

11.2 Ordnung n = 9

11.2.1 Coccoz

Coccoz verwendet für sein Verfahren zur Konstruktion bimagischer Quadrate der Ordnung $n = 9$ zwei Hilfsquadrate als Generatoren.[35] Dies sind zwei Quadrate, bei denen die Summe der Zahlen in den Spalten die magische Summe 369 und die quadrierten Zahlen die bimagische Summe 20 049 ergeben. Um solche Generatoren zu erzeugen, beginnt er mit einem Quadrat in natürlicher Anordnung. Das Zielquadrat teilt er in Blöcke der Größe 3 x 3 auf und überträgt die Zahlen aus der oberen Zeile des Ausgangsquadrates so in die linke obere Ecke, dass sie ein magisches Quadrat der Ordnung 3 ergeben.

Die Zahlen der zweiten Zeile werden in den rechts daneben liegenden Block eingetragen, wobei sie in der gleichen relativen Anordnung zueinander platziert werden. Damit sind die Zahlen des ersten Blockes jeweils um 9 erhöht worden. Danach wird der Block in der rechten oberen Ecke des Zielquadrates entsprechend mit den Zahlen der dritten Zeile des Ausgangsquadrates in natürlicher Anordnung gefüllt.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60	61	62	63
64	65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80	81

2	9	4	11	18	13	20	27	22
7	5	3	16	14	12	25	23	21
6	1	8	15	10	17	24	19	26

Abb. 11.150: Generator: Füllen der oberen drei Blöcke

Ebenso verfährt man mit den restlichen sechs Zeilen des Ausgangsquadrates, die in die noch verbleibenden sechs Blöcke übertragen werden. Dabei bleibt die relative Anordnung der Zahlen zueinander bestehen, jedoch wird die Reihenfolge der Spalten geändert. Bezeichnet man die drei Spalten des linken oberen Blocks von links mit 1, 2 und 3, werden die Spalten in den mittleren drei Blöcken in der Reihenfolge 3, 1 und 2 eingetragen. Bei den unteren drei Blöcken ändert sich die Reihenfolge noch einmal, denn sie werden in der Reihenfolge 2, 3 und 1 eingetragen, wie es in Abbildung 11.151 zu erkennen ist

[35] Coccoz [103]

1	2	3
2	9	4
7	5	3
6	1	8

Block 1			Block 2			Block 3		
2	9	4	11	18	13	20	27	22
7	5	3	16	14	12	25	23	21
6	1	8	15	10	17	24	19	26
36	31	29	45	40	38	54	49	47
32	30	34	41	39	43	50	48	52
28	35	33	37	44	42	46	53	51

a) Reihenfolge 3 1 2

Block 1			Block 2			Block 3		
2	9	4	11	18	13	20	27	22
7	5	3	16	14	12	25	23	21
6	1	8	15	10	17	24	19	26
36	31	29	45	40	38	54	49	47
32	30	34	41	39	43	50	48	52
28	35	33	37	44	42	46	53	51
58	56	63	67	65	72	76	74	81
57	61	59	66	70	68	75	79	77
62	60	55	71	69	64	80	78	73

b) Reihenfolge 2 3 1

Abb. 11.151: Veränderte Reihenfolge der Spalten in den unteren Blöcken

Schreibt man die drei benutzten Anordnungen der Spalten untereinander, erkennt man das benutzte Schema. In jeder Zeile und jeder Spalte der Tabelle ist jede der Kennziffern 1 bis 3 genau einmal vertreten.

1	2	3
3	1	2
2	3	1

Im zweiten Schritt werden die Zeilen der oberen drei Blöcke verschoben. Die mittlere Zeile jeden Blocks wandert zyklisch gesehen einen Block weiter nach rechts, die unteren Zeilen dagegen um zwei Blöcke. Führt man diese Verschiebung der Zeilen in allen Blöcken durch, entsteht der erste Generator aus Abbildung 11.152.

2	9	4	11	18	13	20	27	22
25	23	21	7	5	3	16	14	12
15	10	17	24	19	26	6	1	8

a) Verschieben der Zeilen

2	9	4	11	18	13	20	27	22
25	23	21	7	5	3	16	14	12
15	10	17	24	19	26	6	1	8
36	31	29	45	40	38	54	49	47
50	48	52	32	30	34	41	39	43
37	44	42	46	53	51	28	35	33
58	56	63	67	65	72	76	74	81
75	79	77	57	61	59	66	70	68
71	69	64	80	78	73	62	60	55

b) vollständiger Generator

Abb. 11.152: Generator 1

Der so konstruierte Generator zeichnet sich dadurch aus, dass die Summe aller Zahlen in den Spalten die magische Summe 369 und deren Quadrate die bimagische Summe 20 049 ergibt. Weiterhin besitzen die drei Zahlen in den Spalten aller neun Blöcke übereinstimmende Summen. In den oberen drei Blöcken beträgt die Summe jeweils 42, in den mittleren Blöcken 123 und in den unteren immer 204.

Ein zweiter Generator lässt sich leicht finden, indem man wie in Abbildung 11.153 Änderungen bei der Konstruktion vornimmt:

- Die Spalten der unteren sechs Blöcke werden in umgekehrter Reihenfolge zum ersten Generator gefüllt. Also die mittleren drei Blöcke in der Reihenfolge 2, 3 und 1 und die unteren in der Reihenfolge 3, 1 und 2.
- Die waagrechten Zeilen der neun Blöcke werden nicht nach rechts, sondern nach links verschoben.

2	9	4	11	18	13	20	27	22
7	5	3	16	14	12	25	23	21
6	1	8	15	10	17	24	19	26
31	29	36	40	38	45	49	47	54
30	34	32	39	43	41	48	52	50
35	33	28	44	42	37	53	51	46
63	58	56	72	67	65	81	76	74
59	57	61	68	66	70	77	75	79
55	62	60	64	71	69	73	80	78

a) Reihenfolgen 2 3 1 und 3 1 2

2	9	4	11	18	13	20	27	22
16	14	12	25	23	21	7	5	3
24	19	26	6	1	8	15	10	17
31	29	36	40	38	45	49	47	54
39	43	41	48	52	50	30	34	32
53	51	46	35	33	28	44	42	37
63	58	56	72	67	65	81	76	74
68	66	70	77	75	79	59	57	61
73	80	78	55	62	60	64	71	69

b) Verschieben der Zeilen

Abb. 11.153: Generator 2

Mit Hilfe der beiden Generatoren wird ein semi-bimagisches Quadrat erzeugt. Dazu wählt man die linke Spalte des ersten Generators und trägt sie in die obere Zeile des Zielquadrates ein. Ebenso überträgt man die Zahlen der linken Spalte des zweiten Generators wie in Abbildung 11.154 in die linke Spalte des Zielquadrates. Damit ist das weitere Vorgehen festgelegt, denn die Spalten des ersten Generators werden immer waagrecht und die Spalten des zweiten Generators immer senkrecht eingetragen.

Nun wird die zweite Spalte des Zielquadrates gefüllt, deren obere Zahl mit 25 bereits vorgegeben ist. In der Spalte des zweiten Generators, die diese Zahl 25 enthält, befindet sich die Zahl 6 ebenso wie in der Spalte des ersten Generators, die bereits vorgegebene Zahl 16 enthält. Damit ist mit der Zahl 6 die Zahl gefunden, die an dem Schnittpunkt der zweiten Zeile und Spalte des Zielquadrates eingetragen werden muss.

Die Spalte des ersten Generators kann nun in die zweite Zeile des Zielquadrates eingetragen werden. Dies muss aber so geschehen, dass immer die drei Zahlen aus einem der Blöcke auch wieder in der gleichen relativen Reihenfolge in einen gemeinsamen Block platziert werden. Konkret bedeutet dies, dass nach der bereits eingetragenen Zahl 16 nun die Zahl 6 eingetragen wird, gefolgt von der noch zu dieser Dreiergruppe gehörenden Zahl 20. Die Zahlen der weiteren Dreiergruppen müssen dann auch unbedingt in der gleichen relativen Reihenfolge eingetragen werden. Also folgen dann die Zahlen 41, 28 und 54 und abschließend 66, 62 und 76. Ebenso muss bei den Spalten vorgegangen werden, so dass sich das Zwischenergebnis aus Abbildung 11.154 ergibt.

2	25	15	36	50	37	58	75	71
16								
24								
31								
39								
53								
63								
68								
73								

2	25	15	36	50	37	58	75	71
16	6	20	41	28	54	66	62	76
24	11							
31	48							
39	35							
53	40							
63	77							
68	55							
73	72							

Abb. 11.154: Füllen der ersten beiden Zeilen und Spalten

Entsprechend geht man bei den weiteren Zeilen und Spalten vor, bis das vollständige semi-bimagische Quadrat aus Abbildung 11.155 erzeugt worden ist.

2	25	15	36	50	37	58	75	71
16	6	20	41	28	54	66	62	76
24	11	7	46	45	32	80	67	57
31	48	44						
39	35	49						
53	40	30						
63	77	64						
68	55	81						
73	72	59						

2	25	15	36	50	37	58	75	71
16	6	20	41	28	54	66	62	76
24	11	7	46	45	32	80	67	57
31	48	44	56	79	69	9	23	10
39	35	49	70	60	74	14	1	27
53	40	30	78	65	61	19	18	5
63	77	64	4	21	17	29	52	42
68	55	81	12	8	22	43	33	47
73	72	59	26	13	3	51	38	34

Abb. 11.155: Semi-bimagisches Quadrat

Abschließend muss das semi-bimagische Quadrat noch in ein bimagisches Quadrat umgewandelt werden, indem auch noch die Diagonalen bimagisch gemacht werden. Dazu sucht man in anderen Generatoren nach zwei bimagischen Spalten, bei denen sich die Zahl 41 in der Mitte dieser Spalten befindet. Dazu sind beispielsweise die beiden Generatoren aus Abbildung 11.156 geeignet.

4	3	8	13	12	17	22	21	26
18	14	10	27	23	19	9	5	1
20	25	24	2	7	6	11	16	15
35	31	30	44	40	39	53	49	48
37	45	41	46	54	50	28	36	32
51	47	52	33	29	34	42	38	43
57	62	58	66	71	67	75	80	76
68	64	72	77	73	81	59	55	63
79	78	74	61	60	56	70	69	65

2	7	6	11	16	15	20	25	24
18	14	10	27	23	19	9	5	1
22	21	26	4	3	8	13	12	17
34	33	29	43	42	38	52	51	47
41	37	45	50	46	54	32	28	36
48	53	49	30	35	31	39	44	40
60	56	61	69	65	70	78	74	79
64	72	68	73	81	77	55	63	59
80	76	75	62	58	57	71	67	66

Abb. 11.156: Zwei zusätzliche bimagische Spalten

Die Zahlen dieser beiden Spalten markiert man im semi-bimagischen Quadrat und stellt fest, dass sich in jeder Zeile und jeder Spalte genau zwei dieser Zahlen befinden. Nur die Zeile und Spalte, in der sich die Zahl 41 befindet, besitzt keine Markierung. Weiterhin bilden jeweils vier dieser Zahlen die Ecken eines Rechtecks.

Die vier Zahlen dieser Zahlengruppen werden nun durch Vertauschen von Spalten und Zeilen auf die beiden Diagonalen transformiert. Damit fällt die bisher nicht beachtete Zahl 41 automatisch in das Zentrum und das entstehende Quadrat in Abbildung 11.157 ist bimagisch.

2	25	15	36	50	37	58	75	71
16	6	20	41	28	54	66	62	76
24	11	7	46	45	32	80	67	57
31	48	44	56	79	69	9	23	10
39	35	49	70	60	74	14	1	27
53	40	30	78	65	61	19	18	5
63	77	64	4	21	17	29	52	42
68	55	81	12	8	22	43	33	47
73	72	59	26	13	3	51	38	34

a) Markierungen der Zahlengruppen

24	11	7	45	46	32	67	57	80
73	72	59	13	26	3	38	34	51
53	40	30	65	78	61	18	5	19
68	55	81	8	12	22	33	47	43
16	6	20	28	41	54	62	76	66
39	35	49	60	70	74	1	27	14
63	77	64	21	4	17	52	42	29
31	48	44	79	56	69	23	10	9
2	25	15	50	36	37	75	71	58

b) bimagisches Quadrat

Abb. 11.157: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 9$ (Coccoz)

Variante 1

Die durch die Anordnung der Diagonalen hervorgerufenen Vertauschungen der Zeilen und Spalten können leicht verändert werden. Im Beispiel der Abbildung 11.157b befinden sich die Zahlen 2, 48, 64 und 60 auf der linken unteren Hälfte der Hauptdiagonalen. In Abbildung 11.158 sind dagegen die Vertauschungen der Zeilen und Spalten so durchgeführt worden, dass sich dort jetzt die Zahlen 2, 48, 18 und 22 befinden. Da die in diesem Beispiel durchgeführten Vertauschungen nicht alle Zellen betreffen, sind die Positionen einiger Zahlen gegenüber Abbildung 11.157b unverändert geblieben.

24	11	67	32	46	45	7	57	80
73	72	38	3	26	13	59	34	51
63	77	52	17	4	21	64	42	29
39	35	1	74	70	60	49	27	14
16	6	62	54	41	28	20	76	66
68	55	33	22	12	8	81	47	43
53	40	18	61	78	65	30	5	19
31	48	23	69	56	79	44	10	9
2	25	75	37	36	50	15	71	58

Abb. 11.158: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 9$ (Coccoz, Variante 1a)

Weitere bimagische Quadrate lassen sich im letzten Schritt erzeugen, wenn man die Reihenfolge der vier Rechtecke permutiert. Jetzt wird durch die zugehörigen Zeilen- und Spaltenvertauschungen beispielsweise das bimagische Quadrat in Abbildung 11.159 erzeugt.

2	25	15	36	50	37	58	75	71
16	6	20	41	28	54	66	62	76
24	11	7	46	45	32	80	67	57
31	48	44	56	79	69	9	23	10
39	35	49	70	60	74	14	1	27
53	40	30	78	65	61	19	18	5
63	77	64	4	21	17	29	52	42
68	55	81	12	8	22	43	33	47
73	72	59	26	13	3	51	38	34

a) Markierungen der Zahlengruppen

30	40	65	53	78	19	61	5	18
59	72	13	73	26	51	3	34	38
81	55	8	68	12	43	22	47	33
7	11	45	24	46	80	32	57	67
20	6	28	16	41	66	54	76	62
15	25	50	2	36	58	37	71	75
49	35	60	39	70	14	74	27	1
44	48	79	31	56	9	69	10	23
64	77	21	63	4	29	17	42	52

b) bimagisches Quadrat

Abb. 11.159: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 9$ (Coccoz, Variante 1b)

Variante 2

Eine alternative Möglichkeit ergibt sich, wenn man zur Konstruktion der Generatoren die Zeilen des Ausgangsquadrates in natürlicher Anordnung nicht von oben nach unten ausliest, sondern in der Reihenfolge 147, 258 und 359. Damit ergeben sich beispielsweise die beiden Generatoren aus Abbildung 11.160.

2	9	4	29	36	31	56	63	58
34	32	30	61	59	57	7	5	3
60	55	62	6	1	8	33	28	35
18	13	11	45	40	38	72	67	65
41	39	43	68	66	70	14	12	16
64	71	69	10	17	15	37	44	42
22	20	27	49	47	54	76	74	81
48	52	50	75	79	77	21	25	23
80	78	73	26	24	19	53	51	46

a) Generator 1

2	9	4	29	36	31	56	63	58
61	59	57	7	5	3	34	32	30
33	28	35	60	55	62	6	1	8
13	11	18	40	38	45	67	65	72
66	70	68	12	16	14	39	43	41
44	42	37	71	69	64	17	15	10
27	22	20	54	49	47	81	76	74
77	75	79	23	21	25	50	48	52
46	53	51	73	80	78	19	26	24

b) Generator 2

Abb. 11.160: Zwei Generatoren bei der Variante 2

Auch mit diesen beiden Generatoren kann wieder ein semi-bimagisches Quadrat erzeugt werden.

2	34	60	18	41	64	22	48	80
61	6	29	68	10	45	75	26	49
33	56							
13	39							
66	17							
44	67							
27	50							
77	19							
46	81							

2	34	60	18	41	64	22	48	80
61	6	29	68	10	45	75	26	49
33	56	7	37	72	14	53	76	21
13	39	71	20	52	78	9	32	55
66	17	40	79	24	47	59	1	36
44	67	12	51	74	25	28	63	5
27	50	73	4	30	62	11	43	69
77	19	54	57	8	31	70	15	38
46	81	23	35	58	3	42	65	16

Abb. 11.161: Semi-bimagisches Quadrat

Aus diesem semi-bimagischen Quadrat wird wieder das bimagische Quadrat erzeugt, wozu zwei bimagische Reihen benötigt werden, die auf die Diagonalen abgebildet werden.

4 36 56 12 41 70 26 46 78 und 62 28 6 66 41 16 76 54 20

Mit Hilfe dieser beiden bimagischen Reihen können die Positionen der Zahlen für die Zeilen- und Spaltenvertauschungen gefunden werden, so dass die beiden Reihen auf die Diagonalen abgebildet werden. Damit ergibt sich dann das bimagische Quadrat aus Abbildung 11.162b.

2	34	60	18	41	64	22	48	80
61	6	29	68	10	45	75	26	49
33	56	7	37	72	14	53	76	21
13	39	71	20	52	78	9	32	55
66	17	40	79	24	47	59	1	36
44	67	12	51	74	25	28	63	5
27	50	73	4	30	62	11	43	69
77	19	54	57	8	31	70	15	38
46	81	23	35	58	3	42	65	16

a) Markierungen der Zahlengruppen

46	81	23	35	58	3	42	65	16
33	56	7	37	72	14	53	76	21
44	67	12	51	74	25	28	63	5
27	50	73	4	30	62	11	43	69
2	34	60	18	41	64	22	48	80
13	39	71	20	52	78	9	32	55
77	19	54	57	8	31	70	15	38
61	6	29	68	10	45	75	26	49
66	17	40	79	24	47	59	1	36

b) bimagisches Quadrat

Abb. 11.162: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 9$ (Coccoz, Variante 2)

Variante 3

Man kann die beiden unterschiedlichen Reihenfolgen beim Ausgangsquadrat in natürlicher Anordnung auch mischen. Im folgenden Beispiel ist der erste Generator mit der Reihenfolge 123 456 789 der Zeilen gebildet worden, der zweite dagegen mit 147 258 369.

2	9	4	11	18	13	20	27	22
25	23	21	7	5	3	16	14	12
15	10	17	24	19	26	6	1	8
31	29	36	40	38	45	49	47	54
48	52	50	30	34	32	39	43	41
44	42	37	53	51	46	35	33	28
63	58	56	72	67	65	81	76	74
77	75	79	59	57	61	68	66	70
64	71	69	73	80	78	55	62	60

a) Generator 1

2	9	4	29	36	31	56	63	58
34	32	30	61	59	57	7	5	3
60	55	62	6	1	8	33	28	35
13	11	18	40	38	45	67	65	72
39	43	41	66	70	68	12	16	14
71	69	64	17	15	10	44	42	37
27	22	20	54	49	47	81	76	74
50	48	52	77	75	79	23	21	25
73	80	78	19	26	24	46	53	51

b) Generator 2

Abb. 11.163: Zwei Generatoren bei der Variante 3

Hieraus ergibt sich das semi-bimagische Quadrat aus Abbildung 11.164a, welches durch Zeilen- und Spaltentransformationen in das bimagische Quadrat aus Abbildung 11.164b umgewandelt wird.

2	34	60	13	39	71	27	50	73
25	51	74	3	35	58	14	37	72
15	38	70	26	49	75	1	36	59
31	57	8	45	68	10	47	79	24
48	80	22	32	55	9	43	69	11
44	67	12	46	81	23	33	56	7
63	5	28	65	16	42	76	21	53
77	19	54	61	6	29	66	17	40
64	18	41	78	20	52	62	4	30

a) semi-bimagisches Quadrat

80	9	32	43	22	55	69	11	48
51	58	3	14	74	35	37	72	25
67	23	46	33	12	81	56	7	44
19	29	61	66	54	6	17	40	77
18	52	78	62	41	20	4	30	64
5	42	65	76	28	16	21	53	63
38	75	26	1	70	49	36	59	15
57	10	45	47	8	68	79	24	31
34	71	13	27	60	39	50	73	2

b) bimagisches Quadrat

Abb. 11.164: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 9$ (Coccoz, Variante 3)

Variante 4

Selbstverständlich kann auch jedes der acht magischen Quadrate der Ordnung 3 als Ausgangsquadrat für die Generatoren gewählt werden, wie es beispielsweise in Abbildung 11.165 durchgeführt worden ist.

2	9	4	56	63	58	29	36	31
34	32	30	7	5	3	61	59	57
60	55	62	33	28	35	6	1	8
13	11	18	67	65	72	40	38	45
39	43	41	12	16	14	66	70	68
71	69	64	44	42	37	17	15	10
27	22	20	81	76	74	54	49	47
50	48	52	23	21	25	77	75	79
73	80	78	46	53	51	19	26	24

a) Generator 1

4	9	2	58	63	56	31	36	29
57	59	61	30	32	34	3	5	7
35	28	33	8	1	6	62	55	60
11	13	18	65	67	72	38	40	45
70	66	68	43	39	41	16	12	14
42	44	37	15	17	10	69	71	64
27	20	22	81	74	76	54	47	49
77	79	75	50	52	48	23	25	21
46	51	53	19	24	26	73	78	80

b) Generator 2

Abb. 11.165: Zwei Generatoren bei der Variante 4

Das weitere Vorgehen ändert sich nicht, so dass man zunächst ein semi-bimagisches Quadrat erhält, dass dann in ein bimagisches Quadrat transformiert wird.

4	30	62	18	41	64	20	52	78
57	8	31	68	10	45	79	24	47
35	58	3	37	72	14	51	74	25
11	43	69	22	48	80	9	32	55
70	15	38	75	26	49	59	1	36
42	65	16	53	76	21	28	63	5
27	50	73	2	34	60	13	39	71
77	19	54	61	6	29	66	17	40
46	81	23	33	56	7	44	67	12

a) semi-bimagisches Quadrat

60	73	50	71	34	27	39	13	2
29	54	19	40	6	77	17	66	61
45	31	8	47	10	57	24	79	68
7	23	81	12	56	46	67	44	33
64	62	30	78	41	4	52	20	18
49	38	15	36	26	70	1	59	75
14	3	58	25	72	35	74	51	37
21	16	65	5	76	42	63	28	53
80	69	43	55	48	11	32	9	22

b) bimagisches Quadrat

Abb. 11.166: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 9$ (Coccoz, Variante 4)

Variante 5

In den bisherigen Beispielen sind die Blöcke immer von links nach rechts eingetragen worden. Da diese Reihenfolge abgeändert werden kann, wird jetzt für den ersten Generator die Reihenfolge 3, 2 und 1 gewählt. Die ersten neun Zahlen werden also in den rechten Block eingetragen, danach folgt der mittlere Block und zum Abschluss folgt der Block in der linken oberen Ecke.

Für den zweiten Generator wird dagegen mit 2, 1 und 3 eine andere Reihenfolge gewählt. Wie bei Generator 1 gelten die veränderten Reihenfolgen natürlich für jede Gruppe von drei Blöcken. Zwei damit konstruierte Generatoren sind in Abbildung 11.167 dargestellt.

20	27	22	11	18	13	2	9	4
7	5	3	25	23	21	16	14	12
15	10	17	6	1	8	24	19	26
49	47	54	40	38	45	31	29	36
30	34	32	48	52	50	39	43	41
44	42	37	35	33	28	53	51	46
81	76	74	72	67	65	63	58	56
59	57	61	77	75	79	68	66	70
64	71	69	55	62	60	73	80	78

a) Generator 1

11	18	13	2	9	4	20	27	22
7	5	3	25	23	21	16	14	12
24	19	26	15	10	17	6	1	8
45	40	38	36	31	29	54	49	47
32	30	34	50	48	52	41	39	43
46	53	51	37	44	42	28	35	33
67	65	72	58	56	63	76	74	81
57	61	59	75	79	77	66	70	68
80	78	73	71	69	64	62	60	55

b) Generator 2

Abb. 11.167: Zwei Generatoren bei der Variante 5

Auch hier bleibt das weitere Vorgehen unverändert und aus dem semi-bimagischen Quadrat wird durch Vertauschen von Zeilen und Spalten ein bimagisches Quadrat erzeugt.

11	25	6	40	48	35	72	77	55
7	15	20	30	44	49	59	64	81
24	2	16	53	31	39	73	63	68
45	50	28	65	79	60	13	21	8
32	37	54	61	69	74	3	17	22
46	36	41	78	56	70	26	4	12
67	75	62	18	23	1	38	52	33
57	71	76	5	10	27	34	42	47
80	58	66	19	9	14	51	29	43

a) semi-bimagisches Quadrat

30	15	59	49	20	81	44	7	64
19	58	51	14	66	43	9	80	29
40	25	72	35	6	55	48	11	77
61	37	3	74	54	22	69	32	17
78	36	26	70	41	12	56	46	4
65	50	13	60	28	8	79	45	21
5	71	34	27	76	47	10	57	42
53	2	73	39	16	68	31	24	63
18	75	38	1	62	33	23	67	52

b) bimagisches Quadrat

Abb. 11.168: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 9$ (Coccoz, Variante 5)

11.2.2 Coccoz (algebraisches Muster)

Coccoz hat für die Ordnung $n = 9$ auch ein algebraisches Muster vorgestellt, um bimagische Quadrate zu erzeugen.[36]

BR	Cn	Ar	DQ	dp	MS	bq	aP	cs
ap	cQ	bS	Bq	As	CP	dn	Dr	MR
Ds	Mq	dP	an	bR	cr	AQ	BS	Cp
bn	ar	cR	AS	CQ	Bp	MP	ds	Dq
Aq	BP	Cs	dr	Mn	DR	cS	bp	aQ
dQ	DS	Mp	bP	cq	as	Cr	AR	Bn
cP	bs	aq	CR	Br	An	Dp	MQ	dS
Mr	dR	Dn	cp	aS	bQ	Bs	Cq	AP
CS	Ap	BQ	Ms	DP	dq	aR	cn	br

Abb. 11.169: Algebraisches Muster

Die Bedingungen, die bei der Belegung an die Buchstaben erfüllt werden müssen, sind fast mit denen identisch, die Coccoz bei der Erzeugung bimagischer Quadrate der Ordnung $n = 8$ in Kapitel 11.1.2 benutzt. Der Unterschied liegt nur in zwei zusätzlichen Buchstaben m und n, die mit der fest zugeordneten Zahl 4 immer den Median der Zahlen $0, 1, \ldots, 8$ bildet.

Da damit auch bei dieser Ordnung mit zwei Gruppen von jeweils acht Buchstaben gearbeitet wird, gibt es wieder nur zwei Zahlengruppen, die für die Belegung geeignet sind. Da der Median 4 fest vergeben ist, müssen die Zuweisungen jetzt auf den folgenden beiden Gleichungen basieren.

$$0 + 3 + 6 + 7 = 1 + 2 + 5 + 8$$
$$0^2 + 3^2 + 6^2 + 7^2 = 1^2 + 2^2 + 5^2 + 8^2$$

[36] Coccoz [102] S. 175 – 176

Ein Beispiel einer solchen Belegung und das daraus entstehende bimagische Quadrat ist in Abbildung 11.170 dargestellt. Wie alle mit diesem Muster erzeugten bimagischen Quadrate ist es symmetrisch und besitzt zudem trimagische Diagonalen.

Belegung																	
a	b	c	d	m	D	C	B	A	p	q	r	s	n	S	R	Q	P
8	5	2	7	4	1	6	3	0	6	3	0	7	4	1	8	5	2

36	59	1	15	70	38	49	75	26
79	24	47	31	8	57	68	10	45
17	40	66	77	54	19	6	29	61
50	73	27	2	60	34	39	71	13
4	30	62	64	41	18	20	52	78
69	11	43	48	22	80	55	9	32
21	53	76	63	28	5	16	42	65
37	72	14	25	74	51	35	58	3
56	7	33	44	12	67	81	23	46

Abb. 11.170: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 9$ (Coccoz, Beispiel 1)

Insgesamt existieren für dieses algebraische Muster 128 verschiedene Belegungen, mit denen bimagische Quadrate erstellt werden können. Ein weiteres Beispiel ist in Abbildung 11.171 dargestellt.

Belegung																	
a	b	c	d	M	D	C	B	A	p	q	r	s	n	S	R	Q	P
6	3	0	7	4	1	8	5	2	0	3	6	1	4	7	2	5	8

48	77	25	15	64	44	31	63	2
55	6	35	49	20	81	68	16	39
11	40	72	59	30	7	24	53	73
32	61	3	26	78	46	45	65	13
22	54	74	70	41	12	8	28	60
69	17	37	36	4	56	79	21	50
9	29	58	75	52	23	10	42	71
43	66	14	1	62	33	47	76	27
80	19	51	38	18	67	57	5	34

Abb. 11.171: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 9$ (Coccoz, Beispiel 2)

In dem genannten Artikel gibt Coccoz noch ein zweites algebraisches Muster an, mit dem bimagische Quadrate erzeugt werden können.

DQ	bP	Mp	dS	cs	Bn	CR	aq	Ar
cS	Bs	bQ	ap	Aq	Mr	dn	CP	DR
Cn	DS	AR	Br	dp	cq	bs	MQ	aP
bq	Cr	as	cP	BR	dQ	Dp	An	MS
BP	dR	Cq	As	Mn	aS	cQ	Dr	bp
Ms	an	dP	Dq	br	Cp	AS	cR	BQ
Ap	Mq	BS	CQ	DP	bR	ar	ds	cn
dr	cp	Dn	MR	aQ	AP	Bq	bS	Cs
aR	AQ	cr	bn	CS	Ds	MP	Bp	dq

Abb. 11.172: Algebraisches Muster

Für dieses Muster existieren 32 unterschiedliche Belegungen, mit denen bimagische Quadrate erzeugt werden können. Ein Beispiel ist in Abbildung 11.173 dargestellt.

Belegung																	
a	b	c	d	M	D	C	B	A	p	q	r	s	n	S	R	Q	P
3	2	7	8	4	0	1	6	5	5	6	1	0	4	8	7	2	3

3	22	42	81	64	59	17	34	47
72	55	21	33	52	38	77	13	8
14	9	53	56	78	70	19	39	31
25	11	28	67	62	75	6	50	45
58	80	16	46	41	36	66	2	24
37	32	76	7	20	15	54	71	57
51	43	63	12	4	26	29	73	68
74	69	5	44	30	49	61	27	10
35	48	65	23	18	1	40	60	79

Abb. 11.173: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 9$ (Coccoz, Beispiel 3)

11.2.3 Portier

Portier geht bei seiner Konstruktion bimagischer Quadrate der Ordnung $n = 9$ von dem algebraischen Muster in Abbildung 11.174 aus.[37]

[37] Portier [456]

Hr	Ky	Gu	Bs	Cz	Av	Ep	Fx	Dt
Bp	Cx	At	Er	Fy	Du	Hs	Kz	Gv
Es	Fz	Dv	Hp	Kx	Gt	Br	Cy	Au
Gy	Hu	Kr	Az	Bv	Cs	Dx	Et	Fp
Ax	Bt	Cp	Dy	Eu	Fr	Gz	Hv	Ks
Dz	Ev	Fs	Gx	Ht	Kp	Ay	Bu	Cr
Ku	Gr	Hy	Cv	As	Bz	Ft	Dp	Ex
Ct	Ap	Bx	Fu	Dr	Ey	Kv	Gs	Hz
Fv	Ds	Ez	Kt	Gp	Hx	Cu	Ar	By

Abb. 11.174: Musterquadrat der Ordnung $n = 9$ von Portier

Dieses Quadrat ist äußerst strukturiert aufgebaut, da in jeder Zeile, jeder Spalte, beiden Diagonalen und den neun 3 x 3 - Teilquadraten die verwendeten Groß- und Kleinbuchstaben jeweils genau einmal auftreten.

Zusätzlich wird noch eine bimagische Zahlenreihe von neun Zahlen benötigt, deren Summe 369 und die Summe der quadrierten Zahlen 20 049 beträgt. Durch den speziellen Aufbau des Musterquadrates kann nicht eine beliebige der insgesamt 949 738 bimagischen Reihen benutzt werden, sondern es müssen ganz besondere Reihen gewählt werden.

Dazu benutzt Portier ein beliebiges magisches Quadrat der Ordnung 3 und liest dieses z.B. zeilenweise von links nach rechts und von oben nach unten aus.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

2	9	4	7	5	3	6	1	8

Weiterhin benutzt er ein Quadrat in natürlicher Anordnung, deren Spalten er von links nach rechts mit den Zahlen 1 bis 9 durchnummeriert. Diese Spalten werden dann in der Reihenfolge der aus dem magischen 3 x 3 - Quadrat ausgelesenen Zahlen umgeordnet.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60	61	62	63
64	65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80	81

a) natürliche Anordnung

2	9	4	7	5	3	6	1	8
2	9	4	7	5	3	6	1	8
11	18	13	16	14	12	15	10	17
20	27	22	25	23	21	24	19	26
29	36	31	34	32	30	33	28	35
38	45	40	43	41	39	42	37	44
47	54	49	52	50	48	51	46	53
56	63	58	61	59	57	60	55	62
65	72	67	70	68	66	69	64	71
74	81	76	79	77	75	78	73	80

b) umgeordnete Spalten

Abb. 11.175: Konstruktion von bimagischen Reihen

Die Zahlen auf den beiden Diagonalen ergeben geeignete bimagische Reihen. Liest man die Zahlen des magischen 3 x 3 - Quadrates von den Ecken ausgehend in beiden Richtungen aus und ordnet die Spalten eines Quadrates in natürlicher Anordnung entsprechend um, ergeben sich die acht verschiedenen bimagische Reihen aus Tabelle 11.22.

2	18	22	34	41	48	60	64	80
2	16	24	36	41	46	58	66	80
4	18	20	30	41	52	62	64	78
4	12	26	36	41	46	56	70	78
6	10	26	34	41	48	56	72	76
6	16	20	28	41	54	62	66	76
8	10	24	30	41	52	58	72	74
8	12	22	28	41	54	60	70	74

Tab. 11.22: Acht verschiedene bimagische Reihen

Die so gewonnenen bimagischen Reihen sind für die Konstruktion eines bimagischen Quadrates aus dem Musterquadrat der Abbildung 11.174 geeignet. Dazu nimmt man beispielsweise die mittlere Zeile des Musterquadrates und füllt die mittlere Zeile wie in Abbildung 11.176a mit einer der acht bimagischen Reihen.

Dann wird das algebraische Muster durch eine Zahl im Zahlensystem zur Basis 9 ersetzt. Für die Umwandlung wird jede Zahl zunächst dekrementiert, so dass alle 81 Zahlen in diesem Zahlensystem mit zwei Ziffern dargestellt werden können. Für die mittlere Zeile gilt dann:

Zahl	2	18	22	34	41	48	60	64	80
dekrementierte Zahl	1	17	21	33	40	47	59	63	79
9er Zahlensystem	01	18	23	36	44	52	65	70	87
algebraisches Muster	Ax	Bt	Cp	Dy	Eu	Fr	Gz	Hv	Ks

Tab. 11.23: Belegung der mittleren Zeile

Man erkennt, dass bei dieser Belegung jede der Ziffern $0, 1, \ldots, 8$ sowohl bei den Großbuchstaben als auch bei den Kleinbuchstaben auftritt. Mit der in Tabelle 11.23 berechneten Belegung können dann wie in Abbildung 11.176b die restlichen Zahlen des Quadrates berechnet werden.

Hr	Ky	Gu	Bs	Cz	Av	Ep	Fx	Dt
Bp	Cx	At	Er	Fy	Du	Hs	Kz	Gv
Es	Fz	Dv	Hp	Kx	Gt	Br	Cy	Au
Gy	Hu	Kr	Az	Bv	Cs	Dx	Et	Fp
2	18	22	34	41	48	60	64	80
Dz	Ev	Fs	Gx	Ht	Kp	Ay	Bu	Cr
Ku	Gr	Hy	Cv	As	Bz	Ft	Dp	Ex
Ct	Ap	Bx	Fu	Dr	Ey	Kv	Gs	Hz
Fv	Ds	Ez	Kt	Gp	Hx	Cu	Ar	By

a) mittlere Zeile

72	86	64	17	25	00	43	51	38
13	21	08	42	56	34	77	85	60
47	55	30	73	81	68	12	26	04
66	74	82	05	10	27	31	48	53
01	18	23	36	44	52	65	70	87
35	40	57	61	78	83	06	14	22
84	62	76	20	07	15	58	33	41
28	03	11	54	32	46	80	67	75
50	37	45	88	63	71	24	02	16

b) Zahlensystem zur Basis 9

Abb. 11.176: Darstellung des Quadrates im Zahlensystem zur Basis 9

Wandelt man die Zahlen in das gewöhnliche Zehnersystem um, ergibt sich das bimagische Quadrat aus Abbildung 11.177. Dieses Quadrat ist zusätzlich symmetrisch und besitzt zudem trimagische Diagonalen.

Belegung																	
A	B	C	D	E	F	G	H	K	p	r	s	t	u	v	x	y	z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	3	2	7	8	4	0	1	6	5

66	79	59	17	24	1	40	47	36
13	20	9	39	52	32	71	78	55
44	51	28	67	74	63	12	25	5
61	68	75	6	10	26	29	45	49
2	18	22	34	41	48	60	64	80
33	37	53	56	72	76	7	14	21
77	57	70	19	8	15	54	31	38
27	4	11	50	30	43	73	62	69
46	35	42	81	58	65	23	3	16

Abb. 11.177: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 9$ (Portier, Beispiel 1)

Neben der mittleren Zeile kann auch jede andere Zeile für die Bestimmung der Belegung gewählt werden. Im nächsten Beispiel wurde die dritte Zeile von unten gewählt.

Hr	Ky	Gu	Bs	Cz	Av	Ep	Fx	Dt
Bp	Cx	At	Er	Fy	Du	Hs	Kz	Gv
Es	Fz	Dv	Hp	Kx	Gt	Br	Cy	Au
Gy	Hu	Kr	Az	Bv	Cs	Dx	Et	Fp
Ax	Bt	Cp	Dy	Eu	Fr	Gz	Hv	Ks
Dz	Ev	Fs	Gx	Ht	Kp	Ay	Bu	Cr
2	18	22	34	41	48	60	64	80
Ct	Ap	Bx	Fu	Dr	Ey	Kv	Gs	Hz
Fv	Ds	Ez	Kt	Gp	Hx	Cu	Ar	By

a) dritte Zeile von unten

28	03	11	54	32	46	80	67	75
50	37	45	88	63	71	24	02	16
84	62	76	20	07	15	58	33	41
13	21	08	42	56	34	77	85	60
47	55	30	73	81	68	12	26	04
72	86	64	17	25	00	43	51	38
01	18	23	36	44	52	65	70	87
35	40	57	61	78	83	06	14	22
66	74	82	05	10	27	31	48	53

b) Zahlensystem zur Basis 9

Abb. 11.178: Darstellung des Quadrates im Zahlensystem zur Basis 9

Damit ergibt sich das bimagische Quadrat aus Abbildung 11.179.

Belegung																	
A	B	C	D	E	F	G	H	K	p	r	s	t	u	v	x	y	z
4	5	3	7	8	6	1	2	0	0	8	4	5	1	6	7	3	2

27	4	11	50	30	43	73	62	69
46	35	42	81	58	65	23	3	16
77	57	70	19	8	15	54	31	38
13	20	9	39	52	32	71	78	55
44	51	28	67	74	63	12	25	5
66	79	59	17	24	1	40	47	36
2	18	22	34	41	48	60	64	80
33	37	53	56	72	76	7	14	21
61	68	75	6	10	26	29	45	49

Abb. 11.179: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 9$ (Portier, Beispiel 2)

Neben den Zeilen sind auch die Diagonalen und die Spalten zur Bestimmung einer Belegung geeignet. Im nächsten Beispiel wird die zweite Spalte von rechts benutzt. Damit das Vorgehen besser vergleichbar ist, wird wieder mit der bimagischen Reihe aus den beiden vorangegangenen Beispielen gearbeitet.

Hr	Ky	Gu	Bs	Cz	Av	Ep	Fx	Dt
Bp	Cx	At	Er	Fy	Du	Hs	Kz	Gv
Es	Fz	Dv	Hp	Kx	Gt	Br	Cy	Au
Gy	Hu	Kr	Az	Bv	Cs	Dx	Et	Fp
Ax	Bt	Cp	Dy	Eu	Fr	Gz	Hv	Ks
Dz	Ev	Fs	Gx	Ht	Kp	Ay	Bu	Cr
Ku	Gr	Hy	Cv	As	Bz	Ft	Dp	Ex
Ct	Ap	Bx	Fu	Dr	Ey	Kv	Gs	Hz
Fv	Ds	Ez	Kt	Gp	Hx	Cu	Ar	By

a) rechte äußere Spalte

72	47	13	84	50	28	66	35	01
86	55	21	62	37	03	74	40	18
64	30	08	76	45	11	82	57	23
17	73	42	20	88	54	05	61	36
25	81	56	07	63	32	10	78	44
00	68	34	15	71	46	27	83	52
43	12	77	58	24	80	31	06	65
51	26	85	33	02	67	48	14	70
38	04	60	41	16	75	53	22	87

b) Zahlensystem zur Basis 9

Abb. 11.180: Darstellung des Quadrates im Zahlensystem zur Basis 9

Auch bei diesem Vorgehen entsteht wieder ein bimagisches Quadrat, das in Abbildung 11.181 dargestellt ist.

Belegung																	
A	B	C	D	E	F	G	H	K	p	r	s	t	u	v	x	y	z
2	8	5	0	6	3	1	7	4	6	2	4	1	3	8	5	7	0

66	44	13	77	46	27	61	33	2
79	51	20	57	35	4	68	37	18
59	28	9	70	42	11	75	53	22
17	67	39	19	81	50	6	56	34
24	74	52	8	58	30	10	72	41
1	63	32	15	65	43	26	76	48
40	12	71	54	23	73	29	7	60
47	25	78	31	3	62	45	14	64
36	5	55	38	16	69	49	21	80

Abb. 11.181: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 9$ (Portier, Beispiel 3)

Bei eine vierten und letzten Möglichkeit der Variation benutzt man das Muster aus einem der 3x3 - Teilquadrate zur Bestimmung der Belegung. Im folgenden Beispiel wird dazu das linke obere Teilquadrat gewählt, dessen Inhalt von links nach rechts und von oben nach unten ausgelesen wird.

2	18	22	Bs	Cz	Av	Ep	Fx	Dt
34	41	48	Er	Fy	Du	Hs	Kz	Gv
60	64	80	Hp	Kx	Gt	Br	Cy	Au
Gy	Hu	Kr	Az	Bv	Cs	Dx	Et	Fp
Ax	Bt	Cp	Dy	Eu	Fr	Gz	Hv	Ks
Dz	Ev	Fs	Gx	Ht	Kp	Ay	Bu	Cr
Ku	Gr	Hy	Cv	As	Bz	Ft	Dp	Ex
Ct	Ap	Bx	Fu	Dr	Ey	Kv	Gs	Hz
Fv	Ds	Ez	Kt	Gp	Hx	Cu	Ar	By

a) linke obere Teilquadrat

01	18	23	35	40	57	66	74	82
36	44	52	61	78	83	05	10	27
65	70	87	06	14	22	31	48	53
28	03	11	50	37	45	84	62	76
54	32	46	88	63	71	20	07	15
80	67	75	24	02	16	58	33	41
13	21	08	47	55	30	72	86	64
42	56	34	73	81	68	17	25	00
77	85	60	12	26	04	43	51	38

b) Zahlensystem zur Basis 9

Abb. 11.182: Darstellung des Quadrates im Zahlensystem zur Basis 9

Bei dieser Wahl entsteht das bimagische Quadrat aus Abbildung 11.183.

Belegung																	
A	B	C	D	E	F	G	H	K	p	r	s	t	u	v	x	y	z
5	3	4	8	6	7	2	0	1	6	1	5	2	3	7	4	8	0

2	18	22	33	37	53	61	68	75
34	41	48	56	72	76	6	10	26
60	64	80	7	14	21	29	45	49
27	4	11	46	35	42	77	57	70
50	30	43	81	58	65	19	8	15
73	62	69	23	3	16	54	31	38
13	20	9	44	51	28	66	79	59
39	52	32	67	74	63	17	24	1
71	78	55	12	25	5	40	47	36

Abb. 11.183: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 9$ (Portier, Beispiel 4)

Insgesamt lassen sich mit diesen Variationen

$$9 \cdot 8 + 9 \cdot 8 + 9 \cdot 8 + 2 \cdot 8 + 9 \cdot 8 = 232$$

bimagische Quadrate erzeugen. Eine genauere Untersuchung zeigt aber, dass nur 128 von ihnen wirklich verschieden sind.

Variante 1

Bisher wurde die bimagische Reihe, die als Basiszeile für die Bestimmung der Belegung dient, immer aus dem magischen Quadrat der Ordnung 3 hergeleitet. Portier gibt aber eine Möglichkeit an, wie man weitere bimagische Reihen herleiten kann. Dazu nimmt er das magische Quadrat der Ordnung 3 und erweitert es zyklisch wie in Abbildung 11.184 durch einen Rahmen auf ein Quadrat der Ordnung $n = 5$.

8	6	1	8	6
4	2	9	4	2
3	7	5	3	7
8	6	1	8	6
4	2	9	4	2

Abb. 11.184: Rahmen um das magische Quadrat der Ordnung 3

In diesem Quadrat sind neben dem magischen Quadrat im Zentrum acht weitere semi-magische Quadrate der Ordnung 3 eingebettet.

8	6	1	8	6
4	2	9	4	2
3	7	5	3	7
8	6	1	8	6
4	2	9	4	2

8	6	1	8	6
4	2	9	4	2
3	7	5	3	7
8	6	1	8	6
4	2	9	4	2

8	6	1	8	6
4	2	9	4	2
3	7	5	3	7
8	6	1	8	6
4	2	9	4	2

8	6	1	8	6
4	2	9	4	2
3	7	5	3	7
8	6	1	8	6
4	2	9	4	2

8	6	1	8	6
4	2	9	4	2
3	7	5	3	7
8	6	1	8	6
4	2	9	4	2

8	6	1	8	6
4	2	9	4	2
3	7	5	3	7
8	6	1	8	6
4	2	9	4	2

8	6	1	8	6
4	2	9	4	2
3	7	5	3	7
8	6	1	8	6
4	2	9	4	2

8	6	1	8	6
4	2	9	4	2
3	7	5	3	7
8	6	1	8	6
4	2	9	4	2

Abb. 11.185: Acht eingebettete semi-magische Quadrate

Aus diesen semi-magischen Quadraten können die Zahlen auf acht verschiedene Arten ausgelesen werden, die die Umordnung der Spalten eines Quadrates in natürlicher Anordnung festlegen. Wie bei den ersten Beispielen bilden die Zahlen der Diagonalen bimagische Reihen und können als Basiszeile für die Bestimmung einer geeigneten Belegung dienen.

Im folgenden Beispiel wird das linke semi-magische Quadrat der unteren Zeile aus Abbildung 11.185 benutzt und dessen Zahlen von links nach rechts und von oben nach unten ausgelesen worden:

9	4	2	5	3	7	1	8	6

Damit ergibt sich beispielsweise die bimagische Reihe

9	13	20	32	39	52	55	71	78

Als Musterzeile wird dieses Mal die Hauptdiagonale benutzt, aus deren Mustern und der vorgegebenen bimagischen Reihe die Belegung bestimmt wird.

Hr	Ky	Gu	Bs	Cz	Av	Ep	Fx	78
Bp	Cx	At	Er	Fy	Du	Hs	71	Gv
Es	Fz	Dv	Hp	Kx	Gt	55	Cy	Au
Gy	Hu	Kr	Az	Bv	52	Dx	Et	Fp
Ax	Bt	Cp	Dy	39	Fr	Gz	Hv	Ks
Dz	Ev	Fs	32	Ht	Kp	Ay	Bu	Cr
Ku	Gr	20	Cv	As	Bz	Ft	Dp	Ex
Ct	13	Bx	Fu	Dr	Ey	Kv	Gs	Hz
9	Ds	Ez	Kt	Gp	Hx	Cu	Ar	By

a) linke obere Teilquadrat

20	71	32	66	57	18	43	04	85
63	54	15	40	01	82	26	77	38
46	07	88	23	74	35	60	51	12
31	22	70	17	68	56	84	45	03
14	65	53	81	42	00	37	28	76
87	48	06	34	25	73	11	62	50
72	30	21	58	16	67	05	83	44
55	13	64	02	80	41	78	36	27
08	86	47	75	33	24	52	10	61

b) Zahlensystem zur Basis 9

Abb. 11.186: Darstellung des Quadrates im Zahlensystem zur Basis 9

Damit ist die Belegung eindeutig bestimmt und es entsteht das bimagische Quadrat aus Abbildung 11.187.

Belegung																	
A	B	C	D	E	F	G	H	K	p	r	s	t	u	v	x	y	z
1	6	5	8	4	0	3	2	7	3	0	6	5	2	8	4	1	7

19	65	30	61	53	18	40	5	78
58	50	15	37	2	75	25	71	36
43	8	81	22	68	33	55	47	12
29	21	64	17	63	52	77	42	4
14	60	49	74	39	1	35	27	70
80	45	7	32	24	67	11	57	46
66	28	20	54	16	62	6	76	41
51	13	59	3	73	38	72	34	26
9	79	44	69	31	23	48	10	56

Abb. 11.187: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 9$ (Portier, Variante 1)

Bei neun unterschiedlichen 3 x 3 - Teilquadraten, deren Zahlen man auf acht Arten auslesen kann, lassen sich insgesamt 72 verschiedene bimagische Reihen erzeugen. Da jede der 29 Zeilen, Spalten, Diagonalen oder Teilquadrate als Muster für die Berechnung der Belegung ausgewählt werden kann, existieren insgesamt $72 \cdot 29 = 2088$ Möglichkeiten, ein bimagisches Quadrat zu erzeugen. Es zeigt sich aber, dass nur 720 von ihnen wirklich verschieden sind.

Variante 2

Weitere bimagische Quadrate lassen sich erzeugen, wenn man die Belegungen etwas freier bestimmt. Für die Kleinbuchstaben werden die 72 Kombinationen aus Variante 1 gewählt, wobei die Zahlen allerdings alle dekrementiert werden müssen.

Die Zahlen für die Belegung der Großbuchstaben werden ähnlich bestimmt. Man geht wieder von einem Quadrat der Ordnung 3 aus, welches dieses Mal aber mit den Zahlen in natürlicher Anordnung gefüllt wird. Dieses Quadrat wird wie in Abbildung 11.188 durch einen Rahmen auf ein Quadrat der Ordnung $n = 5$ zyklisch erweitert.

9	7	8	9	7
3	1	2	3	1
6	4	5	6	4
9	7	8	9	7
3	1	2	3	1

Abb. 11.188: Rahmen um ein Quadrat in natürlicher Anordnung

Die Zahlen der neun 3 x 3 - Teilquadrate können wieder auf acht Arten ausgelesen werden, so dass sich insgesamt wieder 72 Kombinationen von Zahlen ergeben. Dekrementiert man diese Zahlen, können alle Kombinationen als Belegung für die Großbuchstaben gewählt werden. Dabei richtet sich die Belegung nach der alphabetischen Reihenfolge der Groß- bzw. Kleinbuchstaben, wie sie beispielhaft in Tabelle 11.24 gewählt worden ist.

	Großbuchstaben									Kleinbuchstaben								
Kombinationen	6	9	3	4	7	1	5	8	2	3	5	7	8	1	6	4	9	2
dekrementiert	5	8	2	3	6	0	4	7	1	2	4	6	7	0	5	3	8	1

Tab. 11.24: Zahlen für eine mögliche Belegung

Mit dieser Belegung ergibt sich das bimagische Quadrat aus Abbildung 11.189.

Belegung																	
A	B	C	D	E	F	G	H	K	p	r	s	t	u	v	x	y	z
5	8	2	3	6	0	4	7	1	2	4	6	7	0	5	3	8	1

68	18	37	79	20	51	57	4	35
75	22	53	59	9	28	70	11	42
61	2	33	66	13	44	77	27	46
45	64	14	47	78	25	31	62	3
49	80	21	36	55	5	38	69	16
29	60	7	40	71	12	54	73	23
10	41	72	24	52	74	8	30	58
26	48	76	1	32	63	15	43	65
6	34	56	17	39	67	19	50	81

Abb. 11.189: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 9$ (Portier, Variante 2)

Da man alle Möglichkeiten für die Klein- und Großbuchstaben miteinander kombinieren kann, ergeben sich $72 \cdot 72 = 5184$ unterschiedliche bimagische Quadrate, von denen aber nur 1296 wirklich verschieden sind.

Transformationen 1

Hat man ein bimagisches Quadrat mit dem algebraischen Muster von Portier erstellt, lassen sich durch Vertauschen von Zahlen weitere bimagische Quadrate erzeugen. Für die erste Transformation wird das gesamte Quadrat in neun Teilblöcke der Größe 3 x 3 unterteilt. Dabei bilden die drei waagrecht nebeneinander liegende Blöcke jeweils ein Rechteck.

Für diese Transformation wird zusätzlich eine beliebige Permutation der Zahlen 1, 2 und 3 benötigt, die die Reihenfolge festlegt, in der die Zahlen in die Zielblöcke und dort in die Zielspalten eingetragen werden. Im folgenden Beispiel wird die Reihenfolge $3, 1, 2$ benutzt.

Die drei Blöcke des oberen Rechtecks werden von links nach rechts ausgelesen. Man beginnt im linken Block und liest jeweils drei Zahlen vom oberen Rand diagonal nach rechts unten aus. Dabei werden die Zeilen und Spalten innerhalb von jedem Block zyklisch betrachtet, so dass der 3 x 3 - Block nie verlassen wird. Sind drei Zahlen ausgelesen worden, fährt man mit der rechts daneben liegenden Diagonale fort.

Die Zahlen des ersten Blocks werden in den ersten durch die Permutation festgelegten Block, hier also Block 3, eingetragen. Dort werden die Zahlen senkrecht untereinander eingetragen, wobei die Reihenfolge der Spalten wieder durch die durch die Permutation festgelegt ist. Also wird die erste Diagonale in die durch die Kennziffer 3 festgelegte Spalte eingetragen, die zweite in die Spalte mit der Kennziffer 1 und die dritte Spalte in die noch verbleibende Spalte 2 des Zielblocks.

Block 1			Block 2			Block 3		
1	2	3	1	2	3	1	2	3
68	18	37	79	20	51	57	4	35
75	22	53	59	9	28	70	11	42
61	2	33	66	13	44	77	27	46
45	64	14	47	78	25	31	62	3
49	80	21	36	55	5	38	69	16
29	60	7	40	71	12	54	73	23
10	41	72	24	52	74	8	30	58
26	48	76	1	32	63	15	43	65
6	34	56	17	39	67	19	50	81

Block 1			Block 2			Block 3		
1	2	3	1	2	3	1	2	3
						18	37	68
						53	75	22
						61	2	33

Sind die Zahlen eines Blocks alle in das Zielquadrat übertragen worden, folgt der nächste Block des Rechtecks im Ausgangsquadrat. Durch die gewählte Reihenfolge folgt jetzt der Zielblock mit der Kennziffer 1, in den die Diagonalen wieder in der Reihenfolge der Spalten 3, 1 und 2 eingetragen werden.

Block 1			Block 2			Block 3		
1	2	3	1	2	3	1	2	3
68	18	37	79	20	51	57	4	35
75	22	53	59	9	28	70	11	42
61	2	33	66	13	44	77	27	46
45	64	14	47	78	25	31	62	3
49	80	21	36	55	5	38	69	16
29	60	7	40	71	12	54	73	23
10	41	72	24	52	74	8	30	58
26	48	76	1	32	63	15	43	65
6	34	56	17	39	67	19	50	81

Block 1			Block 2			Block 3		
1	2	3	1	2	3	1	2	3
20	51	79				18	37	68
28	59	9				53	75	22
66	13	44				61	2	33

Entsprechend verfährt man mit dem letzten Block des oberen Rechtecks. Danach folgen die drei Blöcke des mittleren Rechtecks. Mit jedem Rechteck wandert der zuerst zu bearbeitende Block nach rechts, so dass man jetzt mit Block 2, also dem mittleren Block, beginnt. Unabhängig von dem verschobenen

Ausgangsblock, werden die Zielblöcke und die Zielspalten wieder durch die Reihenfolge der Permutation festgelegt. Damit werden die Zahlen des mittleren Ausgangsblockes wieder in Block 3 des mittleren Rechtecks eingetragen.

Block 1			Block 2			Block 3		
1	2	3	1	2	3	1	2	3
68	18	37	79	20	51	57	4	35
75	22	53	59	9	28	70	11	42
61	2	33	66	13	44	77	27	46
45	64	14	47	78	25	31	62	3
49	80	21	36	55	5	38	69	16
29	60	7	40	71	12	54	73	23
10	41	72	24	52	74	8	30	58
26	48	76	1	32	63	15	43	65
6	34	56	17	39	67	19	50	81

Block 1			Block 2			Block 3		
1	2	3	1	2	3	1	2	3
20	51	79	4	35	57	18	37	68
28	59	9	42	70	11	53	75	22
66	13	44	77	27	46	61	2	33
						78	25	47
						5	36	55
						40	71	12

Ebenso verfährt man mit den restlichen Blöcken, wobei sich der Ausgangsblock des unteren Rechtecks jetzt am rechten Rand befindet. Insgesamt ergibt sich das bimagische Quadrat aus Abbildung 11.190.

20	51	79	4	35	57	18	37	68
28	59	9	42	70	11	53	75	22
66	13	44	77	27	46	61	2	33
62	3	31	64	14	45	78	25	47
16	38	69	21	49	80	5	36	55
54	73	23	29	60	7	40	71	12
41	72	10	52	74	24	30	58	8
76	26	48	63	1	32	65	15	43
6	34	56	17	39	67	19	50	81

Abb. 11.190: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 9$ (Portier, Transformation 1)

Transformation 2

Eine zweite Transformation verläuft ganz ähnlich. Das Ausgangsquadrat wird in Blöcke und Rechtecke aufgeteilt und man benötigt wieder eine Permutation der Zahlen 1, 2 und 3 für die Zuordnung der Zielblöcke und Zielspalten. Allerdings wird das bimagische Ausgangsquadrat bei dieser Variante von rechts nach links ausgewertet.

Mit der Permutation $(2, 3, 0)$ werden die Zahlen des rechten oberen Blocks in den zweiten Block des Zielquadrates übertragen.

Block 1			Block 2			Block 3		
1	2	3	1	2	3	1	2	3
68	18	37	79	20	51	57	4	35
75	22	53	59	9	28	70	11	42
61	2	33	66	13	44	77	27	46
45	64	14	47	78	25	31	62	3
49	80	21	36	55	5	38	69	16
29	60	7	40	71	12	54	73	23
10	41	72	24	52	74	8	30	58
26	48	76	1	32	63	15	43	65
6	34	56	17	39	67	19	50	81

Block 1			Block 2			Block 3		
1	2	3	1	2	3	1	2	3
			57	35	4			
			42	11	70			
			27	77	46			

Wenn das gesamte obere Rechteck abgearbeitet ist, verschiebt sich wieder der Ausgangsblock im mittleren Rechteck, bei dieser Variante allerdings nach links.

Block 1			Block 2			Block 3		
1	2	3	1	2	3	1	2	3
68	18	37	79	20	51	57	4	35
75	22	53	59	9	28	70	11	42
61	2	33	66	13	44	77	27	46
45	64	14	47	78	25	31	62	3
49	80	21	36	55	5	38	69	16
29	60	7	40	71	12	54	73	23
10	41	72	24	52	74	8	30	58
26	48	76	1	32	63	15	43	65
6	34	56	17	39	67	19	50	81

Block 1			Block 2			Block 3		
1	2	3	1	2	3	1	2	3
68	37	18	57	35	4	79	51	20
53	22	75	42	11	70	28	9	59
2	61	33	27	77	46	13	66	44
			47	25	78			
			5	55	36			
			71	40	12			

Entsprechend verfährt man mit den restlichen Blöcken, wobei sich der Ausgangsblock des unteren Rechtecks jetzt am linken Rand befindet. Insgesamt ergibt sich das bimagische Quadrat aus Abbildung 11.191.

68	37	18	57	35	4	79	51	20
53	22	75	42	11	70	28	9	59
2	61	33	27	77	46	13	66	44
31	3	62	47	25	78	45	14	64
16	69	38	5	55	36	21	80	49
73	54	23	71	40	12	60	29	7
24	74	52	10	72	41	8	58	30
63	32	1	76	48	26	65	43	15
39	17	67	34	6	56	50	19	81

Abb. 11.191: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 9$ (Portier, Transformation 2)

Transformation 3

Man kann aus einem bimagischen Quadrat auch weitere bimagische Quadrate erzeugen, wenn man es zunächst in drei Rechtecke der Größe 9 x 3 unterteilt. Ordnet man diese Rechtecke dann entweder in der Reihenfolge 2, 3, 1 oder der Reihenfolge 3, 1, 2 neu, entsteht ein neues bimagisches Quadrat. Für das bimagische Quadrat der Abbildung 11.192 ist die Reihenfolge 2, 1, 3 für Anordnung der horizontalen Rechtecke gewählt worden.

	1	32	63	26	48	76	15	43	65
1	17	39	67	6	34	56	19	50	81
	24	52	74	10	41	72	8	30	58
	36	55	5	49	80	21	38	69	16
2	40	71	12	29	60	7	54	73	23
	47	78	25	45	64	14	31	62	3
	59	9	28	75	22	53	70	11	42
3	66	13	44	61	2	33	77	27	46
	79	20	51	68	18	37	57	4	35

a) bimagisches Quadrat

	36	55	5	49	80	21	38	69	16
2	40	71	12	29	60	7	54	73	23
	47	78	25	45	64	14	31	62	3
	59	9	28	75	22	53	70	11	42
3	66	13	44	61	2	33	77	27	46
	79	20	51	68	18	37	57	4	35
	1	32	63	26	48	76	15	43	65
1	17	39	67	6	34	56	19	50	81
	24	52	74	10	41	72	8	30	58

b) horizontaler Austausch

Abb. 11.192: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 9$ (Portier, Transformation 3)

Transformation 4

Ebenso kann man das bimagische Ausgangsquadrat in drei Rechtecke der Größe 3 x 9 unterteilen. Auch hier existieren die beiden Möglichkeiten, die Rechtecke in den Reihenfolgen 2, 3, 1 bzw. 3, 1, 2 neu anzuordnen. In beiden Fällen entsteht wieder ein bimagisches Quadrat. Im Beispiel der Abbildung 11.193 ist die Anordnung der vertikalen Rechtecke in der Reihenfolge 3, 1, 2 gewählt worden.

	1			2			3	
2	36	58	24	46	80	16	41	66
15	37	71	7	32	57	20	54	76
25	50	75	11	45	67	6	28	62
31	56	9	53	78	19	39	70	14
44	69	10	30	61	5	49	74	27
48	79	23	40	65	18	35	60	1
63	4	29	73	26	51	68	12	43
64	17	42	59	3	34	81	22	47
77	21	52	72	13	38	55	8	33

a) bimagisches Quadrat

	3			1			2	
16	41	66	2	36	58	24	46	80
20	54	76	15	37	71	7	32	57
6	28	62	25	50	75	11	45	67
39	70	14	31	56	9	53	78	19
49	74	27	44	69	10	30	61	5
35	60	1	48	79	23	40	65	18
68	12	43	63	4	29	73	26	51
81	22	47	64	17	42	59	3	34
55	8	33	77	21	52	72	13	38

b) vertikaler Austausch

Abb. 11.193: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 9$ (Portier, Transformation 4)

Transformation 5

Man kann auch beide Transformationen hintereinander ausführen, um weitere bimagische Quadrate zu erzeugen. In diesen Fällen stehen sogar fünf unterschiedliche Anordnungen zur Auswahl.

231	312	132	213	321

Die gewählte Reihenfolge muss allerdings sowohl für den horizontalen als auch die vertikalen Austausch verwendet werden. Im Beispiel der Abbildung 11.194 wurden die Rechtecke zunächst horizontal und danach vertikal mit der neuen Reihenfolge 3, 1, 2 ausgetauscht.

	1			2			3		
	3	23	16	58	81	65	35	46	42
1	62	73	69	30	50	43	4	27	11
	31	54	38	8	19	15	57	77	70
	14	7	21	72	56	76	37	33	53
2	64	60	80	41	34	48	18	2	22
	45	29	49	10	6	26	68	61	75
	25	12	5	74	67	63	51	44	28
3	78	71	55	52	39	32	20	13	9
	47	40	36	24	17	1	79	66	59

a) bimagisches Quadrat

	3			1			2		
	51	44	28	25	12	5	74	67	63
3	20	13	9	78	71	55	52	39	32
	79	66	59	47	40	36	24	17	1
	35	46	42	3	23	16	58	81	65
1	4	27	11	62	73	69	30	50	43
	57	77	70	31	54	38	8	19	15
	37	33	53	14	7	21	72	56	76
2	18	2	22	64	60	80	41	34	48
	68	61	75	45	29	49	10	6	26

b) hor./vert. Austausch

Abb. 11.194: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 9$ (Portier, Transformation 5)

Im Beispiel der Abbildung 11.195 wurden dagegen die Rechtecke zunächst vertikal und danach horizontal ausgetauscht. Die Rechtecke wurden dabei in der Reihenfolge 2, 1, 3 neu angeordnet.

	1			2			3		
	4	20	18	57	79	68	35	51	37
1	30	52	41	8	24	10	58	74	72
	62	78	64	31	47	45	3	25	14
	27	13	2	77	66	61	46	44	33
2	50	39	34	19	17	6	81	67	56
	73	71	60	54	40	29	23	12	7
	11	9	22	70	59	75	42	28	53
3	43	32	48	15	1	26	65	63	76
	69	55	80	38	36	49	16	5	21

a) bimagisches Quadrat

	2			1			3		
	77	66	61	27	13	2	46	44	33
2	19	17	6	50	39	34	81	67	56
	54	40	29	73	71	60	23	12	7
	57	79	68	4	20	18	35	51	37
1	8	24	10	30	52	41	58	74	72
	31	47	45	62	78	64	3	25	14
	70	59	75	11	9	22	42	28	53
3	15	1	26	43	32	48	65	63	76
	38	36	49	69	55	80	16	5	21

b) vert./hor. Austausch

Abb. 11.195: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 9$ (Portier, Transformation 5)

Transformation 6

Bei den bimagischen Quadraten, die mit dem algebraischen Muster von Portier erzeugt worden sind, findet man in jedem Teilquadrat der Ordnung 3 eine Zeile, deren Zahlen addiert 42 ergeben. Betrachtet man zusätzlich die Summe ihrer Quadrate, so gibt es zu vier Zeilen jeweils eine Partnerzeile mit den gleichen Summen, während die neunte Zeile keine Übereinstimmung mit einer anderen Zeile besitzt.

$$
\begin{aligned}
5+27+10 &= 18+1+23 = 42 & \qquad 5^2+27^2+10^2 &= 18^2+1^2+23^2 = 854\\
7+20+15 &= 13+8+21 = 42 & 7^2+20^2+15^2 &= 13^2+8^2+21^2 = 674\\
11+6+25 &= 3+22+17 = 42 & 11^2+6^2+25^2 &= 3^2+22^2+17^2 = 782\\
24+16+2 &= 26+12+4 = 42 & 24^2+16^2+2^2 &= 26^2+12^2+4^2 = 836\\
&19+14+9 = 42 & &19^2+14^2+9^2 = 638
\end{aligned}
$$

Die zueinander passenden Zeilen in den Teilquadraten sind im bimagischen Ausgangsquadrat der Abbildung 11.196a in der gleichen Farbe markiert worden. Die vier zueinander gehörenden Zeilenpaare werden nun gegeneinander ausgetauscht, wobei die Reihenfolge der Zahlen umgekehrt wird. Da die verbleibende neunte Zeile keine Partnerzeile besitzt, werden die drei Zahlen in der Zeile selbst umgekehrt, d.h. die erste Zahl wird mit der dritten Zahl vertauscht. Das Ergebnis ist das veränderte bimagische Quadrat aus Abbildung 11.196b.

5	27	10	30	49	44	61	74	69
34	47	42	59	81	64	3	22	17
57	76	71	7	20	15	32	54	37
18	1	23	40	35	48	65	60	79
38	33	52	72	55	77	13	8	21
67	62	75	11	6	25	45	28	50
19	14	9	53	39	31	78	70	56
51	43	29	73	68	63	26	12	4
80	66	58	24	16	2	46	41	36

a) bimagisches Quadrat

23	1	18	30	49	44	61	74	69
34	47	42	59	81	64	25	6	11
57	76	71	21	8	13	32	54	37
10	27	5	40	35	48	65	60	79
38	33	52	72	55	77	15	20	7
67	62	75	17	22	3	45	28	50
9	14	19	53	39	31	78	70	56
51	43	29	73	68	63	2	16	24
80	66	58	4	12	26	46	41	36

b) verändertes bimagisches Quadrat

Abb. 11.196: Bimagisches Quadrat durch waagrechte Transformationen (Portier, Transformation 6a)

Neben der Summe treten bei den Summen der Zeilen in den Teilquadraten mit 123 und 204 nur noch zwei weitere Summen auf. Die zugehörigen Transformationen erzeugen auch bei diesen Summen wieder bimagische Quadrate.

Statt in den Teilquadraten nach Übereinstimmungen bei waagrechten Zeilen zu suchen, kann man auch die Spalten untersuchen. In diesem Fall gibt es auch mit 96, 123 und 150 nur drei unterschiedliche Summen, die auftreten Betrachtet man etwa Spalten mit der Summe 96, findet man wieder vier Paare von Spalten, bei denen auch die Summe der Quadrate übereinstimmen.

Tauscht man die vier Spaltenpaare wieder gegeneinander aus, wobei die Reihenfolge der Zahlen umgekehrt und kehrt die Zahlen der verbliebenen neunten Spalte wieder in sich um, entsteht das bimagische Quadrat aus Abbildung 11.197b.

6	26	10	29	49	45	61	75	68
34	48	41	60	80	64	2	22	18
56	76	72	7	21	14	33	53	37
17	1	24	40	36	47	66	59	79
39	32	52	71	55	78	13	9	20
67	63	74	12	5	25	44	28	51
19	15	8	54	38	31	77	70	57
50	43	30	73	69	62	27	11	4
81	65	58	23	16	3	46	42	35

a) bimagisches Quadrat

58	26	10	35	49	45	3	75	68
30	48	41	4	80	64	62	22	18
8	76	72	57	21	14	31	53	37
17	63	24	40	28	47	66	5	79
39	32	52	71	9	78	13	55	20
67	1	74	12	59	25	44	36	51
19	15	56	54	38	33	77	70	7
50	43	34	73	69	2	27	11	60
81	65	6	23	16	61	46	42	29

b) verändertes bimagisches Quadrat

Abb. 11.197: Bimagisches Quadrat durch senkrechte Transformationen (Portier, Transformation 6b)

Neben den Zeilen und Spalten kann man in den neun Teilquadraten auch gebrochene Diagonalen betrachten, die vom oberen Rand schräg nach rechts unten verlaufen. Wenn von den Zahlen auf diesen Diagonalen die Summe gebildet wird, treten nur die Summen 114, 120, 123, 126 und 132 auf. Untersucht man zusätzlich auch die Summen der quadrierten Zahlen, ergeben sich auch hier wieder vier Paare mit gleichen Summen und eine Diagonale ohne zugehörigen Partner.

Wenn man die Transformation wie bei den Zeilen und Spalten vornimmt, entsteht auch hier ein neues bimagisches Quadrat. Ein solches Beispiel ist in Abbildung 11.198b analysiert, wobei die Diagonalen alle die Summe 114 besitzen.

7	56	33	21	76	53	14	72	37
23	81	46	16	65	42	3	58	35
12	67	44	5	63	28	25	74	51
29	6	61	49	26	75	45	10	68
54	19	77	38	15	70	31	8	57
40	17	66	36	1	59	47	24	79
60	34	2	80	48	22	64	41	18
73	50	27	69	43	11	62	30	4
71	39	13	55	32	9	78	52	20

a) bimagisches Quadrat

7	20	33	55	76	53	14	72	39
23	81	30	16	11	42	73	58	35
64	67	44	5	63	48	25	2	51
47	6	61	49	26	1	45	66	68
54	57	77	38	15	70	31	8	19
40	17	10	36	75	59	29	24	79
60	34	74	80	28	22	12	41	18
3	50	27	69	43	65	62	46	4
71	37	13	21	32	9	78	52	56

b) verändertes bimagisches Quadrat

Abb. 11.198: Bimagisches Quadrat durch rechtsdiagonale Transformationen (Portier, Transformation 6c)

Entsprechend kann man auch die gebrochenen Diagonalen betrachten, die vom oberen Rand aus schräg nach links unten verlaufen. Auch hier treten nur die Summen 114, 120, 123, 126 und 132 auf und man kann alle Erkenntnisse der anderen Transformationen auf diesen Fall übertragen. Ein Beispiel eines bimagischen Quadrates, welches mit einer solchen Transformation erzeugt wurde, ist in Abbildung 11.199b zu sehen. Bei diesem Beispiel besitzen die Summen der Zahlen auf den Diagonalen alle die Summe 120.

8	19	15	30	50	43	58	81	65
31	54	38	62	73	69	3	23	16
57	77	70	4	27	11	35	46	42
10	6	26	41	34	48	72	56	76
45	29	49	64	60	80	14	7	21
68	61	75	18	2	22	37	33	53
24	17	1	52	39	32	74	67	63
47	40	36	78	71	55	25	12	5
79	66	59	20	13	9	51	44	28

a) bimagisches Quadrat

8	61	15	30	50	37	22	81	65
49	54	38	62	7	69	3	23	64
57	77	10	76	27	11	35	34	42
70	6	26	41	46	48	72	56	4
45	29	31	16	60	80	14	73	21
68	19	75	18	2	58	43	33	53
24	17	79	28	39	32	74	13	63
47	40	36	78	71	25	55	12	5
1	66	59	20	67	9	51	44	52

b) verändertes bimagisches Quadrat

Abb. 11.199: Bimagisches Quadrat durch linksdiagonale Transformationen (Portier, Transformation 6d)

Bei den bisherigen Transformation hat die Summe 123 bereits eine Sonderrolle gespielt, da sie in allen vier Fällen auftritt. Sie bietet aber noch eine zusätzliche Besonderheit, da sie eine weitere Transformation gestattet. Ersetzt man in den neun Gruppen alle Zahlen jeweils durch ihre zu $n^2 + 1$ komplementäre Zahl, entsteht wieder ein bimagisches Quadrat. Dies gilt unabhängig davon, ob die Gruppen von drei Zahlen in den Zeilen, Spalten oder Diagonalen der Teilquadrate gebildet werden.

Im Beispiel der Abbildung 11.200b werden die neun Gruppen mit der Summe 123 aus den Zeilen der Teilquadrate gebildet.

9	58	29	23	75	52	10	71	42
14	66	43	1	62	33	27	76	47
19	80	51	18	67	38	5	57	34
56	36	4	79	50	21	69	37	17
70	41	12	60	28	8	74	54	22
78	46	26	65	45	13	61	32	3
31	2	63	48	25	77	44	15	64
39	16	68	35	6	55	49	20	81
53	24	73	40	11	72	30	7	59

a) bimagisches Quadrat

9	58	29	23	75	52	72	11	40
68	16	39	1	62	33	27	76	47
19	80	51	64	15	44	5	57	34
56	36	4	79	50	21	13	45	65
12	41	70	60	28	8	74	54	22
78	46	26	17	37	69	61	32	3
31	2	63	48	25	77	38	67	18
43	66	14	35	6	55	49	20	81
53	24	73	42	71	10	30	7	59

b) verändertes bimagisches Quadrat

Abb. 11.200: Bimagisches Quadrat durch Austausch mit komplementären Zahlen (Portier, Transformation 6e)

Die folgende allgemeine Analyse dieser Transformationen von bimagischen Quadraten bezieht sich auf die Hauptvariante von Portier, wo eine der acht Basiszeilen aus Tabelle 11.22 in eine Zeile, Spalte, Diagonale oder ein Teilquadrat eingetragen wird, um die zugehörige Belegung zu bestimmen.

Trägt man bei der waagrechten Transformation die acht Basiszeilen aus Tabelle 11.22 in die Zeilen des Musterquadrates ein und bestimmt hieraus die zugehörige Belegung, so treten bei den Zeilensummen in den neun Teilquadraten der Ordnung 3 nur die Zahlen 42, 123 und 204 auf. Auch wenn man die bimagischen Reihen in Spalten, Diagonalen oder Teilquadrate einfügt, ergeben sich immer ganz bestimmte Summen. Die Ergebnisse der hiermit durchgeführten Transformationen ist in Tabelle 11.25 angegeben.

waagrechte Transformation		
bimagische Reihen	auftretende Summen	transformierte Quadrate
Zeilen	42 103 204	immer bimagisch
Spalten	96 123 204	$\frac{1}{3}$ bimagisch und $\frac{2}{3}$ nur magisch
Diagonalen	114 120 123 126 132	immer bimagisch
Teilquadrate	42 123 204	immer bimagisch

Tab. 11.25: Ergebnisse der waagrechten Transformationen

Ähnliche Ergebnisse erhält man bei der senkrechten Transformation.

senkrechte Transformation		
bimagische Reihen	auftretende Summen	transformierte Quadrate
Zeilen	96 123 204	$\frac{1}{3}$ bimagisch und $\frac{2}{3}$ nur magisch
Spalten	42 103 204	immer bimagisch
Diagonalen	114 120 123 126 132	immer bimagisch
Teilquadrate	96 123 204	immer bimagisch

Tab. 11.26: Ergebnisse der senkrechten Transformationen

Vollkommen anders sieht die Situation bei den beiden diagonalen Transformationen aus.

diagonale Transformationen		
bimagische Reihen	auftretende Summen	transformierte Quadrate
Zeilen	114 120 123 126 132	$\frac{1}{3}$ bimagisch und $\frac{2}{3}$ nur magisch
Spalten	123	immer bimagisch
	114 120 126 132	nur magisch
Diagonalen	123	immer bimagisch
	42 96 150 204	nur magisch
Teilquadrate	123	immer bimagisch
	114 120 126v132	nur magisch

Tab. 11.27: Ergebnisse der senkrechten Transformationen

Bei den Hauptvarianten 1 und 2 ist die Situation nur zum Teil ähnlich. In vielen Fällen führen diese Transformationen zu weiteren bimagischen Quadraten, aber nicht in allen. Da eine Analyse für eine Aufteilung der verschiedenen Transformationsarten und der jeweils 72 möglichen Kombinationen für die Groß- und Kleinbuchstaben sehr komplex ist, wurde hierauf verzichtet. So kann man bei diesen beiden Varianten nur experimentieren, wobei man allerdings sehr viele bimagische Quadrate als Ergebnis erhalten wird.

11.2.4 Tarry – Cazalas

Eine mathematische Methode zur Konstruktion bimagischer Quadrate der Ordnung $n = m^2$ stammt von Tarry und wurde von Cazalas noch etwas verfeinert.[38,39] Dieses Verfahren wird hier für den Spezialfall der Ordnung $n = 3^2 = 9$ beschrieben und kann leicht auf andere Dimensionen übertragen werden. Um es zu verstehen, müssen zunächst einige Begriffe näher erklärt werden. Unter einer arithmetische Serie $(r)_m$ versteht man die Folge von Termen

$$0 \quad r \quad 2\,r \quad 3\,r \quad \ldots \quad (m-1)\,r$$

wobei alle Zahlen modulo m berechnet werden. $(2)_5$ ist damit eine abkürzende Schreibweise für die fünf Zahlen

$$0 \quad 2 \quad 4 \quad 1 \quad 3$$

Eine Erweiterung dieser Schreibweise stellt die arithmetische Serie zweiter Ordnung $(r_1, r_2)_m$ dar, wobei r_2 nicht in der Serie $(r_1)_m$ enthalten sein darf. Hiermit ist die Folge von Termen aus Tabelle 11.28 gemeint, bei der die m^2 Zahlen nur der Übersichtlichkeit halber in einer Tabelle angeordnet wurden.

0	r	$2\,r$	$\ldots$	$(m-1)\,r$
r_2+0	r_2+r	$r_2+2\,r$	$\ldots$	$r_2+(m-1)\,r$
$2\,r_2+0$	$2\,r_2+r$	$2\,r_2+2\,r$	$\ldots$	$2\,r_2+(m-1)\,r$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$(m-1)\,r_2+0$	$(m-1)\,r_2+r$	$(m-1)\,r_2+2\,r$	$\ldots$	$(m-1)\,r_2+(m-1)\,r$

Tab. 11.28: m^2 Zahlen der arithmetischen Serie $(r_1, r_2)_m$

Bei der Serie $(2,4)_5$ ergeben sich beispielsweise mit $r_1 = 2$ und $r_2 = 4$ die 25 Zahlen aus Tabelle 11.29.

$(2,4)_5$				
0	2	4	1	3
4	1	3	0	2
3	0	2	4	1
2	4	1	3	0
1	3	0	2	4

Tab. 11.29: m^2 Zahlen der arithmetischen Serie $(2,4)_5$

Bestehen in diesen Serien die Zahlen r_1 und r_2 aus mehreren Ziffern, sind die einzelnen Ziffern immer getrennt voneinander zu betrachten. Jede Berechnung wird also immer nur mit Ziffern an der gleichen Position durchgeführt. Die 25 bzw. 9 Zahlen der nächsten beiden Beispiele sind in Tabelle 11.30 wieder in Tabellenform angegeben, obwohl es sich in beiden Fällen nur um Zahlenfolgen handelt.

38 Tarry [544]
39 Cazalas [79] S. 45 – 68

$(14, 23)_5$						$(0112, 1022)_3$	
00	14	23	32	41			
23	32	41	00	14	0000	0112	0221
41	00	14	23	32	1022	1101	1210
14	23	32	41	00	2011	2120	2202
32	41	00	14	23			

Tab. 11.30: m^2 Zahlen der arithmetischen Serien $(14, 23)_5$ und $(0112, 1022)_3$

Eine wirkliche Tabelle erhält man dagegen mit zwei dieser Serien $(r_1, r_2)_m$ und $(s_1, s_2)_m$. Tabelle 11.31 ist allerdings nicht vollständig ausgefüllt, damit sie übersichtlich und damit verständlich bleibt. Da es sich aber um eine Additionstabelle handelt, lassen sich die fehlenden Einträge aus den Termen der linken Spalte und der obere Zeile ergänzen.

0	r_1	$2\,r_1$	r_2	r_2+r_1	$r_2+2\,r_1$	$2\,r_2$	$2\,r_2+r_1$	$2\,r_2+2\,r_1$
s_1	s_1+r_1	$s_1+2\,r_1$	s_1+r_2	$\cdots$				
$2\,s_1$	$2\,s_1+r_1$	$2\,s_1+2\,r_1$	$2\,s_1+r_2$	$\cdots$				
s_2	s_2+r_1	$s_2+2\,r_1$	s_2+r_2	$\cdots$				
s_2+s_1	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$				
$s_2+2\,s_1$								
$2\,s_2$								
$2\,s_2+s_1$								
$2\,s_2+2\,s_1$								

Tab. 11.31: Tabelle mit den arithmetischen Serien $(r_1, r_2)_m$ und $(s_1, s_2)_m$

In Tabelle 11.32 ist ein vollständiges Beispiel für die Serien $(0111, 1021)_3$ und $(2021, 0122)_3$ angegeben.

	0	r_1	$2\,r_1$	r_2	r_2+r_1	$r_2+2\,r_1$	$2\,r_2$	$2\,r_2+r_1$	$2\,r_2+2\,r_1$
0	0000	0111	0222	1021	1102	1210	2012	2120	2201
s_1	2021	2102	2210	0012	0120	0201	1000	1111	1222
$2\,s_1$	1012	1120	1201	2000	2111	2222	0021	0102	0210
s_2	0122	0200	0011	1110	1221	1002	2101	2212	2020
s_2+s_1	2110	2221	2002	0101	0212	0020	1122	1200	1011
$s_2+2\,s_1$	1101	1212	1020	2122	2200	2011	0110	0221	0002
$2\,s_2$	0211	0022	0100	1202	1010	1121	2220	2001	2112
$2\,s_2+s_1$	2202	2010	2121	0220	0001	0112	1211	1022	1100
$2\,s_2+2\,s_1$	1220	1001	1112	2211	2022	2100	0202	0010	0121

Tab. 11.32: Tabelle mit den arithmetischen Serien $(0111, 1021)_3$ und $(2021, 0122)_3$

Tarry benutzt für die Konstruktion eines bimagischen Quadrates der Ordnung $n = 9$ mit $(r_1, r_2)_3$ und $(s_1, s_2)_3$ zwei dieser Serien. Wenn s_1 nicht in der Serie $(r_1, r_2)_3$ und s_2 nicht in der Serie $(r_1, r_2, s_1)_3$

vorkommen, werden mit diesen beiden Serien jeweils $m^2 = 9$ verschiedene Zahlen erzeugt. Nun belegt man die obere Zeile des Zielquadrates mit den Zahlen der Serie $(r_1, r_2)_3$ und die linke Spalte mit $(s_1, s_2)_3$. Das Zielquadrat wird als Additionstabelle betrachtet und man addiert für alle Zellen die entsprechenden Zahlen aus der obere Zeile und der linken Spalte.

Tarry interpretiert die vier Ziffern a, b , c und d einer Zahl im Zahlensystem zur Basis 3 und berechnet damit die zugehörige Zahl d im Zehnersystem.

$$d = a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + d$$

Er fand heraus, dass das entstehende Quadrat bimagisch ist, wenn drei Bedingungen erfüllt sind, wobei alle Berechnungen modulo $m = 3$ ausgeführt werden.

- Die Determinante der Serie $(r_1, r_2)_3$ muss ungleich 0 sein
- Die Determinante der Serie $(s_1, s_2)_3$ muss ungleich 0 sein
- Die Determinanten für die beiden Serien $(r_1 + s_1, r_2 + s_2)_3$ und $(r_1 - s_1, r_2 - s_2)_3$ müssen ungleich 0 sein.

Dabei stellen die ersten beiden Bedingungen sicher, dass das entstehende Quadrat semi-bimagisch ist. Wenn die beiden weiteren Determinanten in Bedingung 3 ungleich 0, sind auch die Diagonalen und damit das gesamte Quadrat bimagisch.

Dabei ist die Determinante einer Serie $(a_1a_2a_3a_4, b_1b_2b_3b_4)$ ungleich 0, wenn alle sechs Kombinationen von Ziffern a_i und b_j mit $i \neq j$ eine Differenz

$$a_i \cdot b_j - a_j \cdot b_i$$

ergeben, die von 0 verschieden ist. Für die beiden Serien $(r_1, r_2)_3 = (0111, 1021)_3$ und $(s_1, s_2)_3 = (2021, 0122)_3$ aus Tabelle 11.32 ergeben sich beispielsweise folgende Werte:

$$(r_1, r_2)_3 = (0111, 1021)_3$$

$$\begin{aligned}
0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 &= -1 \equiv 2 \\
0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 &= -1 \equiv 2 \\
0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 &= -1 \equiv 2 \\
1 \cdot 2 - 1 \cdot 0 &= 2 \equiv 2 \\
1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 &= 1 \equiv 1 \\
1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 &= -1 \equiv 2
\end{aligned}$$

$$(s_1, s_2)_3 = (2021, 0122)_3$$

$$\begin{aligned}
2 \cdot 1 - 0 \cdot 0 &= 2 \equiv 2 \\
2 \cdot 2 - 2 \cdot 0 &= 4 \equiv 1 \\
2 \cdot 2 - 1 \cdot 0 &= 4 \equiv 1 \\
0 \cdot 2 - 2 \cdot 1 &= -2 \equiv 1 \\
0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 &= -1 \equiv 2 \\
2 \cdot 2 - 1 \cdot 2 &= 2 \equiv 2
\end{aligned}$$

$$(r_1 + s_1, r_2 + s_2)_3 = (2102, 1110)_3$$

$$\begin{aligned}
2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 &= 1 \equiv 1 \\
2 \cdot 1 - 0 \cdot 1 &= 2 \equiv 2 \\
2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 &= -2 \equiv 1 \\
1 \cdot 1 - 0 \cdot 1 &= 1 \equiv 1 \\
1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 &= -2 \equiv 1 \\
0 \cdot 0 - 2 \cdot 1 &= -2 \equiv 1
\end{aligned}$$

$$(r_1 - s_1, r_2 - s_2)_3 = (2102, 1110)_3$$

$$\begin{aligned}
1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 &= 1 \equiv 1 \\
1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 &= -2 \equiv 1 \\
1 \cdot 2 - 0 \cdot 1 &= 2 \equiv 2 \\
1 \cdot 0 - 2 \cdot 2 &= -4 \equiv 2 \\
1 \cdot 2 - 0 \cdot 2 &= 2 \equiv 2 \\
2 \cdot 2 - 0 \cdot 0 &= 4 \equiv 1
\end{aligned}$$

Bei diesem Beispiel sind die Bedingungen von Tarry erfüllt, so dass sich ein bimagisches Quadrat ergibt. Dazu muss man nur noch die Zahlen aus Tabelle 11.32 aus dem Dreiersystem in das Zehnersystem umrechnen, alle Zahlen um 1 erhöhen und es ergibt sich das bimagische Quadrat aus Abbildung 11.201.

1	14	27	35	39	49	60	70	74
62	66	76	6	16	20	28	41	54
33	43	47	55	68	81	8	12	22
18	19	5	40	53	30	65	78	61
67	80	57	11	24	7	45	46	32
38	51	34	72	73	59	13	26	3
23	9	10	48	31	44	79	56	69
75	58	71	25	2	15	50	36	37
52	29	42	77	63	64	21	4	17

Abb. 11.201: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 9$ (Tarry - Cazalas)

Ein zweites Beispiel soll die Benutzung der arithmetischen Serien noch einmal verdeutlichen. Mit den Serien $(r_1, r_2)_3 = (0112, 1022)_3$ und $(s_1, s_2)_3 = (2210, 2102)_3$ ergeben sich zunächst die Zahlen aus Tabelle 11.33.

	0	r_1	$2\,r_1$	r_2	$r_2 + r_1$	$r_2 + 2\,r_1$	$2\,r_2$	$2\,r_2 + r_1$	$2\,r_2 + 2\,r_1$
0	0000	0112	0221	1022	1101	1210	2011	2120	2202
s_1	2210	2022	2101	0202	0011	0120	1221	1000	1112
$2\,s_1$	1120	1202	1011	2112	2221	2000	0101	0210	0022
s_2	2102	2211	2020	0121	0200	0012	1110	1222	1001
$s_2 + s_1$	1012	1121	1200	2001	2110	2222	0020	0102	0211
$s_2 + 2\,s_1$	0222	0001	0110	1211	1020	1102	2200	2012	2121
$2\,s_2$	1201	1010	1122	2220	2002	2111	0212	0021	0100
$2\,s_2 + s_1$	0111	0220	0002	1100	1212	1021	2122	2201	2010
$2\,s_2 + 2\,s_1$	2021	2100	2212	0010	0122	0201	1002	1111	1220

Tab. 11.33: Tabelle mit den arithmetischen Serien $(0112, 1022)_3$ und $(2210, 2102)_3$

Da alle Determinanten ungleich 0 sind, sind die Bedingungen von Tarry erfüllt und mit der Umrechnung der Zahlen in das Zehnersystem, wobei man alle Zahlen um 1 erhöht, ergibt sich das bimagische Quadrat in Abbildung 11.202.

1	15	26	36	38	49	59	70	75
76	63	65	21	5	16	53	28	42
43	48	32	69	80	55	11	22	9
66	77	61	17	19	6	40	54	29
33	44	46	56	67	81	7	12	23
27	2	13	50	34	39	73	60	71
47	31	45	79	57	68	24	8	10
14	25	3	37	51	35	72	74	58
62	64	78	4	18	20	30	41	52

Abb. 11.202: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 9$ (Tarry - Cazalas, Beispiel 2)

Insgesamt existieren für diese Methode 2304 verschiedene arithmetische Serien, mit denen sich unterschiedliche bimagische Quadrate erzeugen lassen.

11.2.5 Hendricks

John R. Hendricks hat ein Verfahren entwickelt, mit dem man bimagische Quadrate der Ordnung $n = m^2$ konstruieren kann, wenn m eine ungerade Zahl ist. Dieses Verfahren soll am Beispiel der Ordnung $n = 9$, also $m = 3$, vorgestellt werden.[40]

Die Positionen der Zellen innerhalb des Quadrates werden bei diesem Verfahren im Zahlensystem zur Basis m angeben. Für eine beliebige Position (s, z) gilt dann

$$\begin{aligned} s &= m \cdot s_2 + s_1 \\ z &= m \cdot z_2 + z_1 \end{aligned}$$

mit $0 \leq s_i \leq m-1$ und $0 \leq z_i \leq m-1$ gilt. Damit ergibt sich beispielsweise für die Position $(3, 7)$ mit den Ziffern des gewählten Zahlensystemes die interne Darstellung $(10, 21)$.

Hendricks legt den Ursprung des Koordinatensystemes in die linke obere Ecke, während sonst in diesem Dokument durchgehend immer die linke untere Ecke gewählt wird. Da sich allerdings durch die Festlegung von Hendricks bei diesem Verfahren deutlich einfachere Gleichungen ergeben, soll dieses Koordinatensystem ausnahmsweise beibehalten werden.

Zusätzlich wird eine 4 x 4 - Matrix benutzt, mit deren Koeffizienten aus den Ziffern der Zellenposition vier weitere Zahlen d_3, d_2, d_1 und d_0 berechnet werden (modulo m).

$$\begin{aligned} d_3 &= c_{31} \cdot s_2 + c_{32} \cdot s_1 + c_{33} \cdot z_2 + c_{34} \cdot z_1 \\ d_2 &= c_{21} \cdot s_2 + c_{22} \cdot s_1 + c_{23} \cdot z_2 + c_{24} \cdot z_1 \\ d_1 &= c_{11} \cdot s_2 + c_{12} \cdot s_1 + c_{13} \cdot z_2 + c_{14} \cdot z_1 \\ d_0 &= c_{01} \cdot s_2 + c_{02} \cdot s_1 + c_{03} \cdot z_2 + c_{04} \cdot z_1 \end{aligned}$$

Mit diesen vier Zahlen wird dann die Zahl x berechnet, die in die Zelle mit der Position (s, z) eingetragen wird.

$$x = m^3 \cdot d_3 + m^2 \cdot d_2 + m \cdot d_1 \cdot + d_0 + 1$$

Alle Koeffizienten der Matrix C müssen kleiner als m sein und die Summe der Koeffizienten in allen Zeilen und allen Spalten muss jeweils 4 ergeben. Ein Beispiel einer solchen Koeffizientenmatrix ist in Abbildung 11.203 angegeben.

$$C = \begin{vmatrix} c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{01} & c_{02} & c_{03} & c_{04} \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Abb. 11.203: Koeffizientenmatrix

[40] Hendricks [188]

Mit dieser Koeffizientenmatrix ergeben sich folgende Gleichungen für die Berechnung der Zahlen d_3, d_2, d_1 und d_0, die modulo m durchgeführt werden muss.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} d_3 & = & s_2 & + & s_1 & + & 2\,z_2 & & \\ d_2 & = & 2\,s_2 & + & s_1 & & & + & z_1 \\ d_1 & = & & & 2\,s_1 & + & z_2 & + & z_1 \\ d_0 & = & s_2 & & & + & z_2 & + & 2\,z_1 \end{array}$$

Im Beispiel der Ordnung $n = 9$ ergibt sich die folgende Gleichung, mit der aus der Position (s, z) einer Zelle die dort einzutragende Zahl x bestimmt werden kann.

$$x = 27 \cdot d_3 + 9 \cdot d_2 + 3 \cdot d_1 + d_0 + 1$$

Zwei Beispiele sollen das Vorgehen konkret veranschaulichen. Im ersten Beispiel wird die Zahl berechnet, die in die Zelle mit der Position $(s, z) = (5, 6)$ eingetragen werden soll. Im Zahlensystem lautet diese Position demnach $(12, 20)$ und es ergeben sich folgende Berechnungen:

$$\begin{aligned} d_3 &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 = 1 + 2 + 4 + 0 = 7 \equiv 1 \\ d_2 &= 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = 2 + 2 + 0 + 0 = 4 \equiv 1 \\ d_1 &= 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = 0 + 4 + 2 + 0 = 6 \equiv 0 \\ d_0 &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 1 + 0 + 2 + 0 = 3 \equiv 0 \end{aligned}$$

Mit diesen Faktoren kann die einzutragende Zahl x berechnet werden.

$$x = 27 \cdot 1 + 9 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 = 37$$

Im zweiten Beispiel soll die Zahl berechnet werden, die an der Position $(s, z) = (3, 7)$ eingetragen werden soll. Zunächst werden die Koordinaten dieser Zelle wieder in das Zahlensystem zur Basis $m = 3$ transformiert und es ergibt sich $(s, z) = (10, 21)$. Damit lauten die Berechnungen

$$\begin{aligned} d_3 &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 1 + 0 + 4 + 0 = 5 \equiv 2 \\ d_2 &= 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 2 + 0 + 0 + 1 = 3 \equiv 0 \\ d_1 &= 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 0 + 0 + 2 + 1 = 3 \equiv 0 \\ d_0 &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 1 + 0 + 2 + 2 = 5 \equiv 2 \end{aligned}$$

und die einzutragende Zahl x kann berechnet werden.

$$x = 27 \cdot 2 + 9 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 1 = 57$$

Führt man die Berechnungen für alle Zellen durch, erhält man das erste semi-bimagische Hilfsquadrat aus Abbildung 11.204a. Danach wird ein weiteres semi-bimagisches Hilfsquadrat konstruiert, indem man die beiden Gleichungen zur Berechnung der Faktoren d_3 und d_2 ebenso vertauscht, wie die Gleichungen für d_1 und d_0.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} d_3 & = & 2\,s_2 & + & s_1 & & & + & z_1 \\ d_2 & = & s_2 & + & s_1 & + & 2\,z_2 & & \\ d_1 & = & s_2 & & & + & z_2 & + & 2\,z_1 \\ d_0 & = & & & 2\,s_1 & + & z_2 & + & z_1 \end{array}$$

Mit diesen neuen Gleichungen werden wieder die Zahlen berechnet, die in dieses Hilfsquadrat einzutragen sind. (siehe Abbildung 11.204b)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	43	76	47	62	14	66	27	33
1	15	48	63	31	64	25	77	2	44
2	26	32	65	45	78	3	61	13	46
3	59	11	53	24	30	72	40	73	7
4	70	22	28	8	41	74	54	60	12
5	75	9	42	10	52	58	29	71	23
6	36	69	21	79	4	37	17	50	56
7	38	80	5	57	18	51	19	34	67
8	49	55	16	68	20	35	6	39	81

a) erstes Hilfsquadrat

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	39	74	67	24	32	52	63	17
1	35	70	27	11	46	57	77	4	42
2	60	14	49	45	80	7	21	29	64
3	23	31	69	62	16	54	38	73	3
4	48	56	10	6	41	76	72	26	34
5	79	9	44	28	66	20	13	51	59
6	18	53	61	75	2	37	33	68	22
7	40	78	5	25	36	71	55	12	47
8	65	19	30	50	58	15	8	43	81

b) zweites Hilfsquadrat

Abb. 11.204: Semi-bimagische Hilfsquadrate

Nun markiert man im ersten Hilfsquadrat alle Zahlen, die sich in der oberen Zeile des zweiten Hilfsquadrates befinden. In Abbildung 11.205 erkennt man, dass sich in jeder Zeile und in jeder Spalte genau eine dieser Zahlen befindet.

1	43	76	47	62	14	66	27	33
15	48	63	31	64	25	77	2	44
26	32	65	45	78	3	61	13	46
59	11	53	24	30	72	40	73	7
70	22	28	8	41	74	54	60	12
75	9	42	10	52	58	29	71	23
36	69	21	79	4	37	17	50	56
38	80	5	57	18	51	19	34	67
49	55	16	68	20	35	6	39	81

Abb. 11.205: 1. Hilfsquadrat mit den Zellen aus der oberen Zeile des zweiten Hilfsquadrates

Da diese neun Zahlen addiert die bimagische Summe ergeben, werden sie jetzt durch das Vertauschen von Zeilen auf die Nebendiagonale transformiert. Weiterhin zeigt sich, dass die dritte Spalte von rechts des zweiten Hilfsquadrates jetzt auf die Hauptdiagonale fällt. Da sich außerdem die Zeilen- und Spaltensummen nicht geändert haben, ist dieses Quadrat jetzt bimagisch.

1	43	76	47	62	14	66	27	33
26	32	65	45	78	3	61	13	46
15	48	63	31	64	25	77	2	44
59	11	53	24	30	72	40	73	7
75	9	42	10	52	58	29	71	23
70	22	28	8	41	74	54	60	12
36	69	21	79	4	37	17	50	56
49	55	16	68	20	35	6	39	81
38	80	5	57	18	51	19	34	67

Abb. 11.206: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 9$ (Hendricks, Beispiel 1)

Varianten

Eine erste Möglichkeit, weitere bimagische Quadrate zu erzeugen, besteht in einer veränderten Koeffizientenmatrix. Insgesamt stehen 64 unterschiedliche Matrizen zur Auswahl, die die gestellten Bedingungen erfüllen, beispielsweise

$$\begin{array}{rclllllll}
d_3 & = & 2\,s_2 & + & s_1 & + & z_2 & & \\
d_2 & = & & & 2\,s_1 & + & z_2 & + & z_1 \\
d_1 & = & s_2 & + & s_1 & & & + & 2\,z_1 \\
d_0 & = & s_2 & & & + & 2\,z_2 & + & z_1
\end{array}$$

Mit diesem Gleichungssysteme und seiner veränderten Form werden zunächst wieder die beiden semi-bimagischen Hilfsquadrate erzeugt.

1	49	70	59	26	38	36	75	15
17	29	77	66	6	54	40	61	19
24	45	57	79	10	31	47	68	8
39	60	27	13	34	73	71	2	50
52	64	4	20	41	62	78	18	30
32	80	11	9	48	69	55	22	43
74	14	35	51	72	3	25	37	58
63	21	42	28	76	16	5	53	65
67	7	46	44	56	23	12	33	81

a) Hilfsquadrat 1

1	65	48	23	60	40	18	79	35
33	13	77	52	8	72	38	21	55
62	45	25	75	28	11	67	50	6
43	26	63	29	12	73	51	4	68
66	46	2	58	41	24	80	36	16
14	78	31	9	70	53	19	56	39
76	32	15	71	54	7	57	37	20
27	61	44	10	74	30	5	69	49
47	3	64	42	22	59	34	17	81

b) Hilfsquadrat 2

Abb. 11.207: Zwei semi-bimagische Hilfsquadrate

Im ersten Beispiel wurden im ersten Hilfsquadrat die Zahlen aus der oberen Zeile des zweiten Hilfsquadrates markiert. Für diesen Schritt kann man aber auch jede andere Zeile auswählen. In Abbildung 11.208a ist für dieses Beispiel die untere Zeile ausgewählt worden. Im letzten Schritt werden die markierten Zellen durch das Vertauschen von Zeilen auf die Nebendiagonale transformiert und man erhält das bimagische Quadrat aus Abbildung 11.208b.

1	49	70	59	26	38	36	75	15
17	29	77	66	6	54	40	61	19
24	45	57	79	10	31	47	68	8
39	60	27	13	34	73	71	2	50
52	64	4	20	41	62	78	18	30
32	80	11	9	48	69	55	22	43
74	14	35	51	72	3	25	37	58
63	21	42	28	76	16	5	53	65
67	7	46	44	56	23	12	33	81

a) markierte Zellen der unteren Zeile

17	29	77	66	6	54	40	61	19
52	64	4	20	41	62	78	18	30
63	21	42	28	76	16	5	53	65
1	49	70	59	26	38	36	75	15
39	60	27	13	34	73	71	2	50
74	14	35	51	72	3	25	37	58
24	45	57	79	10	31	47	68	8
32	80	11	9	48	69	55	22	43
67	7	46	44	56	23	12	33	81

b) bimagisches Quadrat

Abb. 11.208: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 9$ (Hendricks, Beispiel 2)

Für den letzten Schritt bietet sich aber auch eine alternative Möglichkeit an, denn man kann das bimagische Quadrat auch durch das Vertauschen von Spalten erzeugen, wie es in Abbildung 11.209 dargestellt ist.

59	1	36	26	49	75	38	70	15
66	17	40	6	29	61	54	77	19
79	24	47	10	45	68	31	57	8
13	39	71	34	60	2	73	27	50
20	52	78	41	64	18	62	4	30
9	32	55	48	80	22	69	11	43
51	74	25	72	14	37	3	35	58
28	63	5	76	21	53	16	42	65
44	67	12	56	7	33	23	46	81

Abb. 11.209: Bimagisches Quadrat durch Vertauschen der Spalten

Mit den aufgezeigten drei Varianten ist die Anzahl der Möglichkeiten aber noch nicht erschöpft, da man das erzeugte bimagische Quadrat auch noch verändern kann. So kann man die oberen drei oder sechs Zeilen abtrennen und am unteren Rand wieder anfügen und man erhält ein neues bimagisches Quadrat. Wenn man von dem bimagischen Quadrat in Abbildung 11.209 ausgeht und die oberen drei Zeilen am unteren Rand wieder anfügt, erhält man das bimagische Quadrat aus Abbildung 11.210a. Fügt man dagegen die oberen sechs Zeilen am unteren Rand wieder an, ergibt sich das bimagische Quadrat aus Abbildung 11.210b.

13	39	71	34	60	2	73	27	50
20	52	78	41	64	18	62	4	30
9	32	55	48	80	22	69	11	43
51	74	25	72	14	37	3	35	58
28	63	5	76	21	53	16	42	65
44	67	12	56	7	33	23	46	81
59	1	36	26	49	75	38	70	15
66	17	40	6	29	61	54	77	19
79	24	47	10	45	68	31	57	8

a) 3 Zeilen vom obereren Rand

51	74	25	72	14	37	3	35	58
28	63	5	76	21	53	16	42	65
44	67	12	56	7	33	23	46	81
59	1	36	26	49	75	38	70	15
66	17	40	6	29	61	54	77	19
79	24	47	10	45	68	31	57	8
13	39	71	34	60	2	73	27	50
20	52	78	41	64	18	62	4	30
9	32	55	48	80	22	69	11	43

b) 6 Zeilen vom obereren Rand

Abb. 11.210: Bimagisches Quadrat durch Verschieben von Zeilen

Ebenso kann man auch Spalten verschieben, wie es in Abbildung 11.211 dargestellt ist, wobei wieder von dem bimagischen Quadrat aus Abbildung 11.209 ausgegangen wird.

26	49	75	38	70	15	59	1	36
6	29	61	54	77	19	66	17	40
10	45	68	31	57	8	79	24	47
34	60	2	73	27	50	13	39	71
41	64	18	62	4	30	20	52	78
48	80	22	69	11	43	9	32	55
72	14	37	3	35	58	51	74	25
76	21	53	16	42	65	28	63	5
56	7	33	23	46	81	44	67	12

a) 3 Spalten vom linken Rand

38	70	15	59	1	36	26	49	75
54	77	19	66	17	40	6	29	61
31	57	8	79	24	47	10	45	68
73	27	50	13	39	71	34	60	2
62	4	30	20	52	78	41	64	18
69	11	43	9	32	55	48	80	22
3	35	58	51	74	25	72	14	37
16	42	65	28	63	5	76	21	53
23	46	81	44	67	12	56	7	33

b) 6 Spalten vom linken Rand

Abb. 11.211: Bimagisches Quadrat durch Verschieben von Spalten

Selbstverständlich lassen sich diese Verschiebungen auch kombinieren. Das bimagische Quadrat in Abbildung 11.212 erhält man beispielsweise durch eine Verschiebung der oberen sechs Zeilen und der linken drei Spalten.

59	1	36	26	49	75	38	70	15
66	17	40	6	29	61	54	77	19
79	24	47	10	45	68	31	57	8
13	39	71	34	60	2	73	27	50
20	52	78	41	64	18	62	4	30
9	32	55	48	80	22	69	11	43
51	74	25	72	14	37	3	35	58
28	63	5	76	21	53	16	42	65
44	67	12	56	7	33	23	46	81

72	14	37	3	35	58	51	74	25
76	21	53	16	42	65	28	63	5
56	7	33	23	46	81	44	67	12
26	49	75	38	70	15	59	1	36
6	29	61	54	77	19	66	17	40
10	45	68	31	57	8	79	24	47
34	60	2	73	27	50	13	39	71
41	64	18	62	4	30	20	52	78
48	80	22	69	11	43	9	32	55

Abb. 11.212: Bimagisches Quadrat durch Verschieben von Zeilen und Spalten

Die in diesem Kapitel verstellten Varianten können auch in dem Verfahren von Hendricks für bimagische Quadrate der Ordnung $n = 25$ in Kapitel 11.6.2 durchgeführt werden.

11.2.6 De Winkel

Aale de Winkel hat das Verfahren von Hendricks[41] erweitert und arbeitet mit zwei geordneten lateinischen Quadraten.[42] Wie Hendricks legt er den Ursprung $(0, 0)$ in die linke obere Ecke und betrachtet jede Koordinate (s, z) im Zahlensystem zur Basis 3. Für eine beliebige Position (s, z) gilt dann

$$s = 3 \cdot s_1 + s_2$$
$$z = 3 \cdot z_1 + z_2$$

[41] Siehe Kapitel 11.2.5
[42] de Winkel [583]

mit $0 \leq s_i < 3$ und $0 \leq z_i < 3$. Damit ergibt sich beispielsweise für die Position $(5, 6)$ mit den Ziffern des Zahlensystemes zur Basis 3 die Darstellung $(12, 20)$. Mit den Faktoren

$$(a_1 \;\; a_2 \;\; a_3 \;\; a_4) \quad \text{und} \quad (b_1 \;\; b_2 \;\; b_3 \;\; b_4)$$

werden die Ziffern der in die Zelle einzutragenden Zahlen modulo 3 berechnet.

$$\begin{aligned} d_2 &= a_1 \cdot s_1 + a_2 \cdot s_2 + a_3 \cdot z_1 + a_4 \cdot z_2 \\ d_1 &= b_1 \cdot s_1 + b_2 \cdot s_2 + b_3 \cdot z_1 + b_4 \cdot z_2 \end{aligned}$$

Aus diesen beiden Ziffern wird anschließend die einzutragende Zahl d im Zehnersystem berechnet

$$d = d_2 \cdot 3 + d_1$$

die in die entsprechende Zelle des Hilfsquadrates eingetragen wird. Mit den Koeffizienten

$$\begin{array}{llll} a_1 = 0 & a_2 = 1 & a_3 = 1 & a_4 = 2 \\ b_1 = 2 & b_2 = 0 & b_3 = 1 & b_4 = 1 \end{array}$$

ergibt sich für die Position $(5, 6)$

$$\begin{aligned} d_2 &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 4 \equiv 1 \\ d_1 &= 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = 4 \equiv 1 \end{aligned}$$

Damit lautet die einzutragende Zahl

$$d = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 1 = 4$$

und man erhält das erste Hilfsquadrat A aus Abbildung 11.213. Wählt man dagegen die Parameter mit

$$\begin{array}{llll} a_1 = 1 & a_2 = 1 & a_3 = 0 & a_4 = 2 \\ b_1 = 2 & b_2 = 1 & b_3 = 1 & b_4 = 0 \end{array}$$

ergibt sich das Hilfsquadrat B.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	3	6	2	5	8	1	4	7
1	7	1	4	6	0	3	8	2	5
2	5	8	2	4	7	1	3	6	0
3	4	7	1	3	6	0	5	8	2
4	2	5	8	1	4	7	0	3	6
5	6	0	3	8	2	5	7	1	4
6	8	2	5	7	1	4	6	0	3
7	3	6	0	5	8	2	4	7	1
8	1	4	7	0	3	6	2	5	8

a) Hilfsquadrat A

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	4	8	5	6	1	7	2	3
1	6	1	5	2	3	7	4	8	0
2	3	7	2	8	0	4	1	5	6
3	1	5	6	3	7	2	8	0	4
4	7	2	3	0	4	8	5	6	1
5	4	8	0	6	1	5	2	3	7
6	2	3	7	4	8	0	6	1	5
7	8	0	4	1	5	6	3	7	2
8	5	6	1	7	2	3	0	4	8

b) Hilfsquadrat B

Abb. 11.213: Geordnete lateinische Hilfsquadrate

Das Hilfsquadrat B muss allerdings noch mit zwei Schritten weiterverarbeitet werden. Zunächst werden die Zeilen und Spalten in der neuen Reihenfolge

$$0 \quad 4 \quad 8 \quad 5 \quad 6 \quad 1 \quad 7 \quad 2 \quad 3$$

angeordnet und danach wird dieses Ergebnis zusätzlich an der Nebendiagonalen gespiegelt.

	0	4	8	5	6	1	7	2	3
0	0	6	3	1	7	4	2	8	5
4	7	4	1	8	5	2	6	3	0
8	5	2	8	3	0	6	4	1	7
5	4	1	7	5	2	8	3	0	6
6	2	8	5	0	6	3	1	7	4
1	6	3	0	7	4	1	8	5	2
7	8	5	2	6	3	0	7	4	1
2	3	0	6	4	1	7	5	2	8
3	1	7	4	2	8	5	0	6	3

a) Zeilen- und Spaltentausch

0	7	5	4	2	6	8	3	1
6	4	2	1	8	3	5	0	7
3	1	8	7	5	0	2	6	4
1	8	3	5	0	7	6	4	2
7	5	0	2	6	4	3	1	8
4	2	6	8	3	1	0	7	5
2	6	4	3	1	8	7	5	0
8	3	1	0	7	5	4	2	6
5	0	7	6	4	2	1	8	3

b) Spiegelung an der Nebendiagonalen

Abb. 11.214: Das veränderte Hilfsquadrat B

Überlagert man diese beiden Hilfsquadrate mit der Gleichung

$$9 \cdot A + B + 1$$

entsteht das bimagische Quadrat aus Abbildung 11.215.

1	35	60	23	48	79	18	40	65
70	14	39	56	9	31	78	19	53
49	74	27	44	69	10	30	61	5
38	72	13	33	55	8	52	77	21
26	51	73	12	43	68	4	29	63
59	3	34	81	22	47	64	17	42
75	25	50	67	11	45	62	6	28
36	58	2	46	80	24	41	66	16
15	37	71	7	32	57	20	54	76

Abb. 11.215: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 9$ (de Winkel, Beispiel 1)

Allerdings ist bei einigen Parametern die letzte Spiegelung nicht mehr notwendig. Mit den Koeffizienten

$$a_1 = 0 \qquad a_2 = 1 \qquad a_3 = 1 \qquad a_4 = 2$$
$$b_1 = 2 \qquad b_2 = 0 \qquad b_3 = 1 \qquad b_4 = 1$$

erhält man das Hilfsquadrat A und mit

$$\begin{array}{llll} a_1 = 0 & a_2 = 1 & a_3 = 1 & a_4 = 2 \\ b_1 = 2 & b_2 = 0 & b_3 = 1 & b_4 = 1 \end{array}$$

das Hilfsquadrat B aus Abbildung 11.216.

0	3	6	2	5	8	1	4	7
7	1	4	6	0	3	8	2	5
5	8	2	4	7	1	3	6	0
4	7	1	3	6	0	5	8	2
2	5	8	1	4	7	0	3	6
6	0	3	8	2	5	7	1	4
8	2	5	7	1	4	6	0	3
3	6	0	5	8	2	4	7	1
1	4	7	0	3	6	2	5	8

a) Hilfsquadrat A

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	3	6	2	5	8	1	4	7
1	7	1	4	6	0	3	8	2	5
2	5	8	2	4	7	1	3	6	0
3	4	7	1	3	6	0	5	8	2
4	2	5	8	1	4	7	0	3	6
5	6	0	3	8	2	5	7	1	4
6	8	2	5	7	1	4	6	0	3
7	3	6	0	5	8	2	4	7	1
8	1	4	7	0	3	6	2	5	8

b) Hilfsquadrat B

Abb. 11.216: Geordnete lateinische Hilfsquadrate

Bei diesen Parametern muss für das Hilfsquadrat nur noch die Zeilen- und Spaltenpermutation

$$0 \quad 4 \quad 8 \quad 7 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 6 \quad 1$$

durchgeführt werden, während die Spiegelung an der Nebendiagonalen entfällt. Überlagert man die beiden Hilfsquadrate A und B, entsteht das bimagische Quadrat aus Abbildung 11.217.

	0	4	8	7	2	3	5	6	1
0	0	5	7	4	6	2	8	1	3
4	2	4	6	3	8	1	7	0	5
8	1	3	8	5	7	0	6	2	4
7	3	8	1	7	0	5	2	4	6
2	5	7	0	6	2	4	1	3	8
3	4	6	2	8	1	3	0	5	7
5	6	2	4	1	3	8	5	7	0
6	8	1	3	0	5	7	4	6	2
1	7	0	5	2	4	6	3	8	1

a) Spalten- und Zeilentransformation

1	33	62	23	52	75	18	38	67
66	14	43	58	9	29	80	19	51
47	76	27	42	71	10	34	57	5
40	72	11	35	55	6	48	77	25
24	53	73	16	39	68	2	31	63
59	7	30	81	20	49	64	15	44
79	21	50	65	13	45	60	8	28
36	56	4	46	78	26	41	70	12
17	37	69	3	32	61	22	54	74

b) bimagisches Quadrat

Abb. 11.217: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 9$ (de Winkel, Beispiel 2)

Insgesamt führt Aale de Winkel auf seiner Webseite 224 Kombinationen von Parametern an. Aus jedem einzelnen dieser bimagischen Quadrate können dann weitere 192 bimagische Quadrate durch das Vertauschen von Zeilen und Spalten erzeugt werden.

11.2.7 Chen

George Chen arbeitet mit zwei Hilfsquadraten, die er in Teilquadrate der Größe 3 x 3 unterteilt.[43] In das Zentrum des ersten Hilfsquadrates A fügt er ein beliebiges magisches Quadrat der Ordnung 3 ein. Dieses Quadrat verschiebt er dann horizontal und vertikal, wobei abhängig von der Richtung Verschiebungen der Spalten bzw. Zeilen vorgenommen werden, die innerhalb der Teilquadrate zyklisch betrachtet werden.

- nach oben: die Spalten werden um eine Position nach rechts verschoben
- nach unten: die Spalten werden um eine Position nach links verschoben
- nach links: die Zeilen werden um eine Position nach oben verschoben
- nach rechts: die Zeilen werden um eine Position nach unten verschoben

4	3	8
9	5	1
2	7	6

			8	4	3			
			1	9	5			
			6	2	7			
9	5	1	4	3	8	2	7	6
2	7	6	9	5	1	4	3	8
4	3	8	2	7	6	9	5	1
			3	8	4			
			5	1	9			
			7	6	2			

1	9	5	8	4	3	6	2	7
6	2	7	1	9	5	8	4	3
8	4	3	6	2	7	1	9	5
9	5	1	4	3	8	2	7	6
2	7	6	9	5	1	4	3	8
4	3	8	2	7	6	9	5	1
5	1	9	3	8	4	7	6	2
7	6	2	5	1	9	3	8	4
3	8	4	7	6	2	5	1	9

Abb. 11.218: Hilfsquadrat A: Füllen der Teilquadrate

Beim zweiten Hilfsquadrat B wird im Zentrum kein magisches Quadrat, sondern ein Quadrat in natürlicher Anordnung eingefügt. Dabei kann dieses Teilquadrat durch Spiegelungen oder Drehungen auf eine der acht üblichen Arten verändert werden. In diesem Hilfsquadrat werden die Verschiebungen der Spalten und Zeilen der Teilquadrate genau entgegengesetzt zum Hilfsquadrat A vorgenommen.

3	2	1
6	5	4
9	8	7

			2	1	3			
			5	4	6			
			8	7	9			
9	8	7	3	2	1	6	5	4
3	2	1	6	5	4	9	8	7
6	5	4	9	8	7	3	2	1
			1	3	2			
			4	6	5			
			7	9	8			

8	7	9	2	1	3	5	4	6
2	1	3	5	4	6	8	7	9
5	4	6	8	7	9	2	1	3
9	8	7	3	2	1	6	5	4
3	2	1	6	5	4	9	8	7
6	5	4	9	8	7	3	2	1
7	9	8	1	3	2	4	6	5
1	3	2	4	6	5	7	9	8
4	6	5	7	9	8	1	3	2

Abb. 11.219: Hilfsquadrat B: Füllen der Teilquadrate

[43] Aus einem Arbeitsblatt während einer privaten Kommunikation

Alle Zahlen der beiden Hilfsquadrate werden um 1 vermindert und mit der Rechnung

$$9 \cdot A + B + 1$$

überlagert. Damit entsteht das bimagische Quadrat aus Abbildung 11.220.

8	79	45	65	28	21	50	13	60
47	10	57	5	76	42	71	34	27
68	31	24	53	16	63	2	73	39
81	44	7	30	20	64	15	59	49
12	56	46	78	41	4	36	26	70
33	23	67	18	62	52	75	38	1
43	9	80	19	66	29	58	51	14
55	48	11	40	6	77	25	72	35
22	69	32	61	54	17	37	3	74

Abb. 11.220: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 9$ (Chen)

Da man das magische Ausgangsquadrat der Ordnung 3 aus Hilfsquadrat A in allen acht Formen mit allen acht unterschiedlichen Anordnungen im Zentrum des Hilfsquadrates B kombinieren kann, entstehen insgesamt 64 bimagische Quadrate.

Variante

Weitere bimagische Quadrate lassen sich mit diesem Verfahren erzeugen, wenn man wie in der Abbildung 11.221 ein Quadrat in natürlicher Anordnung in das Zentrum des Hilfsquadrates A einfügt.

9	8	7
6	5	4
3	2	1

			7	9	8			
			4	6	5			
			1	3	2			
6	5	4	9	8	7	3	2	1
3	2	1	6	5	4	9	8	7
9	8	7	3	2	1	6	5	4
			8	7	9			
			5	4	6			
			2	1	3			

4	6	5	7	9	8	1	3	2
1	3	2	4	6	5	7	9	8
7	9	8	1	3	2	4	6	5
6	5	4	9	8	7	3	2	1
3	2	1	6	5	4	9	8	7
9	8	7	3	2	1	6	5	4
5	4	6	8	7	9	2	1	3
2	1	3	5	4	6	8	7	9
8	7	9	2	1	3	5	4	6

Abb. 11.221: Hilfsquadrat A: Füllen der Teilquadrate

Dann muss das magische Quadrat wie in Abbildung 11.222 in das Zentrum des Hilfsquadrates B einfügt werden.

8	3	4
1	5	9
6	7	2

			3	4	8			
			5	9	1			
			7	2	6			
6	7	2	8	3	4	1	5	9
8	3	4	1	5	9	6	7	2
1	5	9	6	7	2	8	3	4
			4	8	3			
			9	1	5			
			2	6	7			

7	2	6	3	4	8	5	9	1
3	4	8	5	9	1	7	2	6
5	9	1	7	2	6	3	4	8
6	7	2	8	3	4	1	5	9
8	3	4	1	5	9	6	7	2
1	5	9	6	7	2	8	3	4
2	6	7	4	8	3	9	1	5
4	8	3	9	1	5	2	6	7
9	1	5	2	6	7	4	8	3

Abb. 11.222: Hilfsquadrat B: Füllen der Teilquadrate

Überlagert man die beiden Hilfsquadrate A und B, entsteht das bimagische Quadrat aus Abbildung 11.223.

34	47	42	57	76	71	5	27	10
3	22	17	32	54	37	61	74	69
59	81	64	7	20	15	30	49	44
51	43	29	80	66	58	19	14	9
26	12	4	46	41	36	78	70	56
73	68	63	24	16	2	53	39	31
38	33	52	67	62	75	18	1	23
13	8	21	45	28	50	65	60	79
72	55	77	11	6	25	40	35	48

Abb. 11.223: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 9$ (Chen, Beispiel 2)

Da sich auch mit diesen Anordnungen wiederum 64 bimagische Quadrate ergeben, lassen sich insgesamt 128 bimagische Quadrate erzeugen. Allerdings sind nur 80 von ihnen wirklich verschieden.

11.2.8 Anzahl symmetrischer Quadrate

Um symmetrische bimagische Quadrate der Ordnung $n = 9$ zu erzeugen, gibt es zwei weniger bekannte Verfahren von Coccoz[44] und Chen[45]. Die wesentlich bekannteren und allgemeineren Verfahren von Coccoz[46], Hendricks[47], Portier[48] und Tarry-Cazalas[49,50] erzeugen dagegen nur mit ganz bestimmten Parametern einige symmetrische Quadrate.

[44] Coccoz [102] S. 175 – 176
[45] Aus einem Arbeitsblatt während einer privaten Kommunikation, 2002
[46] Coccoz [103]
[47] Hendricks [188]
[48] Portier [456]
[49] Tarry [544]
[50] Cazalas [79] S. 45 – 68

Walter Trump und ich haben alle 1 307 729 880 symmetrischen bimagischen Quadrate der Ordnung 9 erzeugt, wobei wir von den bekannten 949 738 bimagischen Serien ausgegangen sind. Wegen der Symmetrie müssen beide Diagonalen, die mittlere Spalte und die mittlere Zeile aus symmetrischen Serien bestehen. Dies bedeutet, dass sich die Zahl 41 im Zentrum des Quadrats befinden muss und die zum Zentrum des Quadrats symmetrisch liegenden Zahlen addiert immer $n^2 + 1$ ergeben, bei der Ordnung $n = 9$ also $9^2 + 1 = 82$.

Nur 32 der bimagischen Serien sind auch symmetrisch, beispielsweise 2, 16, 24, 36, 41, 46, 58, 66, 80.

				2				
				16				
				24				
				36				
				41				
				46				
				58				
				66				
				80				

Abb. 11.224: Lage der symmetrischen Serien im symmetrischen bimagischen Quadrat

Zusätzlich werden für die Zeilen und Spalten komplementfreie Serien wie 1, 2, 26, 49, 54, 57, 59, 60, 61 benötigt, die natürlich auch nicht die Zahl 41 enthalten dürfen. Insgesamt gibt es 537 608 dieser Serien.

Ein symmetrisches bimagisches Quadrat ist in Abbildung 11.225a dargestellt. Damit die Anzahl dieser magischen Quadrate leichter zu erkennen ist, werden alle Quadrate wie in Abbildung 11.225b in die LDR-Form[51] transformiert. Bei dieser Darstellungsform wird die kleinste Zahl 7 der beiden Diagonalen in der linken oberen Ecke platziert. Durch Zeilen-Spalten-Permutationen wird das Quadrat dabei so umgeformt, dass die Zahlen auf der in der linken oberen Ecke beginnenden Diagonalen alle aufsteigend angeordnet sind, ohne dass es seine Eigenschaften verliert.

29	56	30	28	80	72	48	4	22
6	75	57	43	46	5	35	70	32
73	20	15	17	58	42	14	61	69
74	33	1	19	66	18	44	59	55
37	51	79	71	41	11	3	31	45
27	23	38	64	16	63	81	49	8
13	21	68	40	24	65	67	62	9
50	12	47	77	36	39	25	7	76
60	78	34	10	2	54	52	26	53

a) symmetrisch / bimagisch

7	47	77	50	36	76	39	25	12
61	15	17	73	58	69	42	14	20
59	1	19	74	66	55	18	44	33
4	30	28	29	80	22	72	48	56
31	79	71	37	41	45	11	3	51
26	34	10	60	2	53	54	52	78
49	38	64	27	16	8	63	81	23
62	68	40	13	24	9	65	67	21
70	57	43	6	46	32	5	35	75

b) LDR-Form

Abb. 11.225: Symmetrisches bimagisches Quadrat mit Euler-Serien

[51] siehe Kapitel 18.6

Insgesamt lassen sich mit den bimagischen Serien 6 811 090 unterschiedliche symmetrische bimagische Quadrate in LDR-Form erzeugen. Aus jedem dieser Quadrate lassen sich durch symmetrische Zeilen-Spalten-Permutationen weitere $8\,!! = 384$ weitere Quadrate erstellen. Allerdings sind nur 192 davon unterschiedlich, da jeweils zwei von ihnen durch eine Drehung um 180° auseinander hervorgehen. Damit existieren insgesamt 1 307 729 280 unterschiedliche symmetrische bimagische Quadrate. Zählt man auch die durch Spiegelungen und Drehungen erzeugten Quadrate mit, erhöht sich die Gesamtzahl auf 10 461 834 240 Quadrate. Keines dieser Quadrate ist pandiagonal.

Mit der symmetrischen Permutation $(0, 5, 6, 1, 4, 7, 2, 3, 8)$ erhält man beispielsweise aus der LDR-Form der Abbildung 11.225b das symmetrische bimagische Quadrat aus Abbildung 11.226.

	0	5	6	1	4	7	2	3	8
8	7	76	39	47	36	25	77	50	12
7	61	69	42	15	58	14	17	73	20
6	59	55	18	1	66	44	19	74	33
5	4	22	72	30	80	48	28	29	56
4	31	45	11	79	41	3	71	37	51
3	26	53	54	34	2	52	10	60	78
2	49	8	63	38	16	81	64	27	23
1	62	9	65	68	24	67	40	13	21
0	70	32	5	57	46	35	43	6	75

a) Spaltenpermutation

	0	5	6	1	4	7	2	3	8
8	7	76	39	47	36	25	77	50	12
3	26	53	54	34	2	52	10	60	78
2	49	8	63	38	16	81	64	27	23
7	61	69	42	15	58	14	17	73	20
4	31	45	11	79	41	3	71	37	51
1	62	9	65	68	24	67	40	13	21
6	59	55	18	1	66	44	19	74	33
5	4	22	72	30	80	48	28	29	56
0	70	32	5	57	46	35	43	6	75

b) Zeilenpermutation

Abb. 11.226: Symmetrisches bimagisches Quadrat durch die Zeilen-Spalten-Permutation $(0, 5, 6, 1, 4, 7, 2, 3, 8)$

Auffallend ist, dass man mit jeder der 32 symmetrischen bimagischen Serien entsprechende Quadrate erzeugen kann. Kombiniert man diese 32 Serien untereinander, ergeben sich 330 gültige Kombinationen, da zwei Serien nur die Zahl 41 und keine andere Zahl gemeinsam haben dürfen. Mit jeder dieser 330 Kombinationen lassen sich dann mindestens acht symmetrische bimagische Quadrate erzeugen.

Aufteilung in Teilquadrate mit gleicher Zahlensumme

Von den 6 811 090 symmetrischen bimagischen Quadrate in LDR-Form lassen sich 579 in ein Raster von Teilquadraten der Größe 3×3 zerlegen, bei denen die Summe aller Zahlen in den Teilquadraten immer 369 beträgt. Ein solches Quadrat ist in Abbildung 11.227a dargestellt.

Bei 216 dieser Quadrate ergeben die quadrierten Zahlen wie im Beispiel der Abbildung 11.227b sogar immer die gleiche Summe 20 049.

2	79	39	50	10	35	49	69	36
21	18	38	77	22	81	19	56	37
73	75	24	15	48	31	4	42	57
23	27	71	30	74	12	65	53	14
66	62	6	28	41	54	76	20	16
68	29	17	70	8	52	11	55	59
25	40	78	51	34	67	58	7	9
45	26	63	1	60	5	44	64	61
46	13	33	47	72	32	43	3	80

a) Teilquadrate mit der Summe 369

4	51	68	79	18	35	37	57	20
73	12	29	23	60	40	7	54	71
43	63	26	1	48	65	76	15	32
69	44	49	36	2	16	21	77	55
30	74	10	58	41	24	72	8	52
27	5	61	66	80	46	33	38	13
50	67	6	17	34	81	56	19	39
11	28	75	42	22	59	53	70	9
62	25	45	47	64	3	14	31	78

b) Teilquadrate mit den Summen 369 und 20049

Abb. 11.227: Symmetrische bimagische Quadrate mit Teilquadraten gleicher Summe

Wendet man auf diese Quadrate eine der 192 symmetrischen Zeilen-Spalten-Permutationen an, sind die sich ergebenden Quadrate natürlich immer noch symmetrisch und bimagisch. Jedoch geht die Aufteilung in Teilquadrate mit gleichen Summen wie im Beispiel der Abbildung 11.228 natürlich verloren.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
8	15	10	65	81	58	26	44	51	19
7	71	27	43	28	2	57	60	13	68
6	76	59	3	5	64	48	35	37	42
5	21	74	73	29	30	7	70	32	33
4	20	4	66	36	41	46	16	78	62
3	49	50	12	75	52	53	9	8	61
2	40	45	47	34	18	77	79	23	6
1	14	69	22	25	80	54	39	55	11
0	63	31	38	56	24	1	17	72	67

a) Teilquadrate mit gleichen Summen

	2	0	5	7	4	1	3	8	6
6	3	76	48	37	64	59	5	42	35
8	65	15	26	51	58	10	81	19	44
3	12	49	53	8	52	50	75	61	9
1	22	14	54	55	80	69	25	11	39
4	66	20	46	78	41	4	36	62	16
7	43	71	57	13	2	27	28	68	60
5	73	21	7	32	30	74	29	33	70
0	38	63	1	72	24	31	56	67	17
2	47	40	77	23	18	45	34	6	79

b) symmetrisch / bimagisch

Abb. 11.228: Symmetrisches bimagisches Quadrat durch die Zeilen-Spalten-Permutation (2, 0, 5, 7, 4, 1, 3, 8, 6)

Betrachtet man nicht nur die 6 811 090 symmetrischen bimagischen Quadraten in LDR-Form, sondern die 1 307 729 280 Quadrate, die sich durch symmetrische Zeilen-Spalten-Permutationen ergeben, erhält man 101 532 Quadrate mit Teilquadraten der Summe 369 und 15 552 Quadrate mit der Summe 20 049 bei den quadrierten Zahlen. In Abbildung 11.229 wird für jeweils ein Beispiel für diese beiden Fälle dargestellt.

28	57	81	43	30	73	32	17	8
35	76	5	40	58	11	27	72	45
68	3	16	29	18	67	48	59	61
19	51	33	62	80	60	13	44	7
12	46	26	78	41	4	56	36	70
75	38	69	22	2	20	49	31	63
21	23	34	15	64	53	66	79	14
37	10	55	71	24	42	77	6	47
74	65	50	9	52	39	1	25	54

a) Teilquadrate mit der Summe 369

18	57	51	44	2	77	19	67	34
47	62	14	49	16	55	39	6	81
79	37	4	69	36	21	26	32	65
40	7	73	30	24	72	29	71	23
60	54	12	74	41	8	70	28	22
59	11	53	10	58	52	9	75	42
17	50	56	61	46	13	78	45	3
1	76	43	27	66	33	68	20	35
48	15	63	5	80	38	31	25	64

b) Teilquadrate mit den Summen 369 und 20049

Abb. 11.229: Symmetrische bimagische Quadrate mit Teilquadraten gleicher Summe

Symmetrische bimagische Quadrate mit eingebettetem magischen Teilquadrat

Von den 6 811 090 symmetrischen bimagischen Quadraten in LDR-Form besitzen 2588 ein im Zentrum eingebettetes magisches Teilquadrat mit der magischen Summe 123. Bei den 1 307 729 280 unterschiedlichen Quadraten, die durch Zeilen-Spalten-Permutationen entstehen, sind es sogar 15 552 Quadrate. Zwei Beispiele dieser beiden Gruppen sind in Abbildung 11.230 dargestellt.

6	49	77	79	36	47	24	20	31
43	16	80	30	56	19	45	71	9
23	27	18	1	70	44	67	65	54
14	75	29	32	78	13	61	42	25
74	72	34	22	41	60	48	10	8
57	40	21	69	4	50	53	7	68
28	17	15	38	12	81	64	55	59
73	11	37	63	26	52	2	66	39
51	62	58	35	46	3	5	33	76

a) LDR-Form

31	75	33	25	22	59	2	48	74
43	71	19	44	78	9	61	24	20
36	5	79	17	40	18	52	69	53
67	27	35	45	68	10	66	50	1
12	54	56	6	41	76	26	28	70
81	32	16	72	14	37	47	55	15
29	13	30	64	42	65	3	77	46
62	58	21	73	4	38	63	11	39
8	34	80	23	60	57	49	7	51

b) Zeilen-Spalten-Permutationen

Abb. 11.230: Symmetrische bimagische Quadrate mit eingebetteten magischen Quadraten

11.2.9 Anzahl symmetrischer diagonaler Euler-Quadrate

Schränkt man die bimagische Serien auf Euler-Serien ein, reduziert sich die Anzahl erheblich. Diese Serien enthalten Zahlen im Bereich 1 bis 81, die sich in der Form $9x + y + 1$ mit $x, y = 0 \ldots 8$ beschreiben lassen. Dabei dürfen weder zwei gleiche x noch zwei gleiche y vorkommen. Jetzt stehen für die Konstruktion nur noch 16 symmetrische und 4508 komplementfreie bimagische Serien zur Verfügung.

Insgesamt lassen sich mit den Euler-Serien 1908 unterschiedliche symmetrische bimagische Quadrate in LDR-Form erzeugen. Aus jedem dieser diagonalen Euler-Quadrate lassen sich durch symmetrische

Zeilen-Spalten-Permutationen 192 weitere Quadrate erzeugen, so dass es insgesamt 366 336 unterschiedliche symmetrische bimagische diagonale Euler-Quadrate gibt.

Mit der symmetrischen Permutation $(1, 5, 8, 2, 4, 6, 0, 3, 7)$ erhält man beispielsweise aus der LDR-Form der Abbildung 11.231a das symmetrische bimagische Quadrat aus Abbildung 11.231b.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
8	4	51	14	73	70	29	39	63	26
7	79	18	35	59	22	42	1	48	65
6	32	57	20	7	54	71	76	15	37
5	69	77	49	30	8	10	27	38	61
4	46	2	66	24	41	58	16	80	36
3	21	44	55	72	74	52	33	5	13
2	45	67	6	11	28	75	62	25	50
1	17	34	81	40	60	23	47	64	3
0	56	19	43	53	12	9	68	31	78

a) LDR-Form

	1	5	8	2	4	6	0	3	7
7	18	42	65	35	22	1	79	59	48
3	44	52	13	55	74	33	21	72	5
0	19	9	78	43	12	68	56	53	31
6	57	71	37	20	54	76	32	7	15
4	2	58	36	66	41	16	46	24	80
2	67	75	50	6	28	62	45	11	25
8	51	29	26	14	70	39	4	73	63
5	77	10	61	49	8	27	69	30	38
1	34	23	3	81	60	47	17	40	64

b) Zeilen-Spalten-Permutationen

Abb. 11.231: Symmetrisches bimagisches Quadrat mit Euler-Serien

Von denen 1908 Quadraten in LDR-Form lassen sich 106 in ein Raster von Teilquadraten der Größe 3 x 3 zerlegen, bei denen die Summe aller Zahlen in den Teilquadraten immer 369 beträgt. Ein solches Quadrat ist in Abbildung 11.232a dargestellt. Bei 72 dieser Quadrate ergeben sogar die quadrierten Zahlen wie im Beispiel der Abbildung 11.232b immer dir gleiche Summe 20 049.

3	65	46	42	58	23	16	81	35
31	15	77	54	8	70	38	19	57
62	43	27	73	30	11	69	50	4
14	26	61	29	72	75	49	6	37
64	48	2	22	41	60	80	34	18
45	76	33	7	10	53	21	56	68
78	32	13	71	52	9	55	39	20
25	63	44	12	74	28	5	67	51
47	1	66	59	24	40	36	17	79

a) Teilquadrate mit der Summe 369

2	53	68	73	16	31	39	63	24
75	18	33	59	20	44	1	52	67
37	61	22	3	54	69	74	17	32
71	77	47	34	6	10	27	40	57
36	4	12	26	41	56	70	78	46
25	42	55	72	76	48	35	5	11
50	65	8	13	28	79	60	21	45
15	30	81	38	62	23	49	64	7
58	19	43	51	66	9	14	29	80

b) Teilquadrate mit den Summen 369 und 20049

Abb. 11.232: Symmetrische bimagische Euler-Quadrate mit Teilquadraten gleicher Summe

Betrachtet man nicht nur die Quadrate in LDR-Form, sondern die 366 336 Quadrate, die sich aus ihnen durch symmetrische Zeilen-Spalten-Permutationen ergeben, existieren 10 224 Quadrate mit Teilquadraten der Summe 369 und 3456 Quadrate mit der Summe 20 049 bei den quadrierten Zahlen. In Abbildung 11.233 wird für jeweils ein Beispiel für diese beiden Fälle dargestellt.

15	38	54	31	8	57	70	77	19
32	55	71	78	52	20	9	13	39
26	49	29	37	72	14	75	61	6
65	16	59	3	24	35	40	46	81
48	80	22	18	41	64	60	2	34
1	36	42	47	58	79	23	66	17
76	21	7	68	10	45	53	33	56
43	69	73	62	30	4	11	27	50
63	5	12	25	74	51	28	44	67

a) Teilquadrate mit der Summe 369

6	11	25	67	62	75	45	50	28
40	48	35	23	18	1	79	60	65
77	55	72	33	52	38	8	13	21
19	9	14	56	78	70	31	39	53
66	80	58	46	41	36	24	2	16
29	43	51	12	4	26	68	73	63
61	69	74	44	30	49	10	27	5
17	22	3	81	64	59	47	34	42
54	32	37	7	20	15	57	71	76

b) Teilquadrate mit den Summen 369 und 20049

Abb. 11.233: Symmetrische bimagische Euler-Quadrate mit Teilquadraten gleicher Summe

Konstruktion

Die Konstruktion der symmetrischen bimagischen Quadrate der Ordnung $n = 9$ ist identisch mit der Konstruktion für symmetrische Quadrate der Ordnung 7. Wie dort beschrieben[52], kann die Anzahl der komplementfreien Serien halbiert werden, da die Summe aus der minimalen und der maximalen Zahl der Serien kleiner als $n^2 + 1$ sein muss.

Damit stehen für die Konstruktion 32 symmetrische und 268 804 komplementfreie bimagische Serien zur Verfügung. Entsprechend werden dann die Euler-Quadrate aus 16 symmetrischen 2254 komplementfreien bimagischen Serien gebildet.

11.3 Ordnungen 10 bis 15

Obwohl in der Zeit nach der Entdeckung des ersten bimagischen Quadrates von Pfeffermann viele bimagische Quadrate der Ordnungen 8 und 9 konstruiert worden sind, wurden keine Algorithmen für die Ordnungen 10 bis 15 gefunden. Erst für die Ordnung $n = 16$ sind wieder Verfahren bekannt, die bimagische Quadrate dieser Ordnung erzeugen.

Für alle Ordnungen 10 bis 15 sind heutzutage zwar bimagische Quadrate bekannt, die aber nicht mit einer allgemeinen Methode, sondern durch viel Handarbeit, Probieren und vielfach der Hilfe eines Computers gefunden wurden.[53]

11.3.1 Ordnung 10

Für die Ordnung $n = 10$ gelang dies Fredrik Jansson im Jahre 2004. Er kombinierte mit Hilfe eines Computers bimagische Zahlenreihen, die schon länger bekannt waren.

[52] siehe Kapitel 15.2.2
[53] Boyer [54]

2	19	70	1	66	74	73	60	68	72
58	77	15	3	65	4	67	69	71	76
62	63	82	75	61	59	79	6	5	13
49	18	14	78	98	40	25	96	43	44
94	41	27	42	35	91	21	95	37	22
93	39	23	38	31	90	33	30	29	99
34	100	36	83	45	24	26	28	97	32
8	85	64	57	7	56	80	48	16	84
54	11	86	47	87	12	92	20	50	46
51	52	88	81	10	55	9	53	89	17

Abb. 11.234: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 10$ (Jansson)

In den darauf folgenden Jahren wurden weitere bimagische Quadrate dieser Ordnung gefunden, etwa im Jahre 2006 von Christian Boyer oder im Jahre 2007 von Pan Fengchu.

81	44	41	63	88	3	49	53	1	82
26	38	92	90	25	45	42	62	2	83
96	97	31	46	68	8	22	24	57	56
16	100	9	75	11	71	43	54	65	61
28	48	7	51	34	91	95	59	77	15
13	27	87	14	60	89	55	64	79	17
72	36	52	18	86	47	23	6	66	99
58	10	74	30	84	50	5	94	67	33
80	76	39	98	37	32	78	4	21	40
35	29	73	20	12	69	93	85	70	19

a) Boyer

89	51	52	88	53	55	10	9	17	81
59	82	62	61	13	6	79	75	63	5
1	2	66	68	72	74	70	73	60	19
42	41	27	22	91	21	35	37	95	94
57	80	64	8	16	85	56	48	7	84
54	20	86	92	11	50	12	87	46	47
78	98	14	40	43	18	44	96	25	49
3	65	4	77	71	58	76	15	67	69
39	30	33	23	90	38	99	31	93	29
83	36	97	26	45	100	24	34	32	28

b) Pan Fengchu

Abb. 11.235: Bimagische Quadrate der Ordnung $n = 10$

11.3.2 Ordnung 11

Nur 18 Tage nach seinem bimagischen Quadrat der Ordnung 10 fand Fredrik Jansson im Jahre 2004 auch das erste bimagische Quadrat der Ordnung 11, indem er wiederum lange bekannte bimagische Reihen erfolgreich kombinierte.

84	80	88	2	82	10	81	74	1	86	83
53	114	118	35	47	26	27	55	58	113	25
119	45	40	51	116	38	42	29	33	117	41
21	109	20	66	60	37	115	111	54	59	19
69	87	85	4	79	89	94	8	3	75	78
39	15	14	105	96	64	103	61	98	63	13
121	34	44	57	46	120	30	48	108	31	32
73	91	90	71	7	92	95	5	76	6	65
52	36	17	107	16	104	18	77	70	62	112
12	11	99	72	100	67	43	97	68	9	93
28	49	56	101	22	24	23	106	102	50	110

Abb. 11.236: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 11$ (Jansson)

Im Mai 2005 konstruierte Chen Mutian aus China ein weiteres bimagisches Quadrat der Ordnung 11. Sein Quadrat ist symmetrisch und selbstkomplementär. Zusätzlich sind sogar vier Zahlenreihen trimagisch: die mittlere Zeile, die mittlere Spalte und die beiden Diagonalen.

9	19	65	30	72	76	106	121	93	47	33
101	97	88	20	56	4	27	74	70	108	26
86	87	51	109	112	41	12	54	3	37	79
84	11	58	94	8	91	40	78	120	24	63
6	104	23	115	22	105	69	60	55	73	39
15	32	117	80	45	61	77	42	5	90	107
83	49	67	62	53	17	100	7	99	18	116
59	98	2	44	82	31	114	28	64	111	38
43	85	119	68	110	81	10	13	71	35	36
96	14	52	48	95	118	66	102	34	25	21
89	75	29	1	16	46	50	92	57	103	113

Abb. 11.237: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 11$ (Chen Mutian)

Bei dem Versuch von Walter Trump und Holger Danielsson, ihren Algorithmus zur Erzeugung symmetrischer bimagischer diagonaler Euler-Quadrate[54] der Ordnung 9 auf die Ordnung 11 zu übertragen, hat sich herausgestellt, dass es keine derartigen Quadrate gibt. Dabei fanden wir allerdings 129 bimagische Euler-Quadrate in LDR-Darstellung.[55] Sie sind allerdings nicht mehr symmetrisch und die Diagonalen bestehen auch nicht aus Euler-Serien.

[54] siehe Kapitel 11.2.8
[55] siehe Kapitel 18.6

1	102	61	20	121	70	43	93	79	52	29
92	24	87	45	40	118	64	69	6	22	104
82	77	35	98	30	100	116	18	58	4	53
50	15	11	71	57	42	84	23	96	109	113
119	10	27	37	89	88	47	63	106	68	17
19	39	108	66	49	91	67	81	32	117	2
36	97	74	7	21	28	110	46	114	60	78
33	85	95	112	3	54	16	105	75	34	59
65	51	111	107	72	13	26	9	38	80	99
73	56	14	83	103	5	90	120	55	31	41
101	115	48	25	86	62	8	44	12	94	76

7	47	76	105	64	88	37	23	93	112	19
80	21	28	68	89	4	119	60	52	40	110
35	11	48	95	27	111	14	74	61	108	87
71	83	13	53	44	63	106	114	1	32	91
12	118	62	33	54	101	82	94	70	3	42
116	73	86	5	107	25	45	22	43	92	57
96	24	38	120	81	18	66	9	102	50	67
55	104	113	41	2	98	72	84	20	56	26
31	59	8	78	69	39	90	109	121	16	51
65	97	100	15	117	49	30	36	79	77	6
103	34	99	58	17	75	10	46	29	85	115

Abb. 11.238: Bimagische Quadrate der Ordnung $n = 11$ (Trump - Danielsson)

Sieben dieser Quadrate besitzen sogar trimagische Diagonalen.

5	81	58	53	90	43	110	118	67	29	17
74	21	114	106	66	49	34	6	91	86	24
89	62	27	68	109	121	9	80	19	50	37
83	23	7	38	52	102	112	97	65	15	77
40	119	22	63	78	92	28	104	2	76	47
14	11	35	26	71	61	96	51	108	111	87
57	107	45	10	25	20	84	70	39	99	115
120	46	75	94	18	30	59	44	82	3	100
55	93	105	12	4	79	69	32	117	41	64
31	36	98	88	116	73	16	56	48	101	8
103	72	85	113	42	1	54	13	33	60	95

7	114	88	56	16	46	39	75	30	98	102
64	10	107	117	23	37	90	80	49	17	77
55	94	31	14	70	100	118	43	84	2	60
19	82	57	44	109	3	26	111	72	51	97
89	35	21	104	63	29	69	6	121	86	48
81	110	113	68	95	61	54	27	9	41	12
71	25	50	96	11	119	78	13	65	103	40
36	74	1	53	116	93	18	59	101	33	87
120	62	38	4	79	22	108	52	91	67	28
24	20	92	83	47	76	66	106	34	115	8
105	45	73	32	42	85	5	99	15	58	112

Abb. 11.239: Bimagische Quadrate der Ordnung $n = 11$ mit trimagischen Diagonalen (Trump - Danielsson)

Aus jedem dieser 129 Quadrate lassen sich durch Zeilen-Spalten-Transformationen weitere $\frac{10\,!!}{2} = 1920$ unterschiedliche bimagische Quadrate erzeugen.

11.3.3 Ordnung 12

Im September 2007 konstruierte Pan Fengchu aus China ein bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 12$. Sein Quadrat in Abbildung 11.240 ist selbstkomplementär und komplementäre Zahlenpaare liegen vertikal symmetrisch.[56]

[56] Pan Fengchu [130]

5	70	86	3	97	1	95	98	94	120	102	99
40	56	93	4	118	2	113	110	106	78	36	114
6	8	54	45	41	57	135	108	92	90	119	115
61	7	117	65	21	66	58	96	128	14	112	125
62	34	12	68	126	71	64	16	127	132	116	42
63	60	134	69	38	72	9	15	121	44	123	122
82	85	11	76	107	73	136	130	24	101	22	23
83	111	133	77	19	74	81	129	18	13	29	103
84	138	28	80	124	79	87	49	17	131	33	20
139	137	91	100	104	88	10	37	53	55	26	30
105	89	52	141	27	143	32	35	39	67	109	31
140	75	59	142	48	144	50	47	51	25	43	46

Abb. 11.240: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 12$ (Pan Fengchu)

Die Anzahl bimagischer Serien ist mit 45 828 982 764 so groß, dass die Konstruktion solcher Quadrate sehr aufwändig ist. Da für diese Ordnung auch trimagische Quadrate existieren, ist das Interesse an bimagischen Quadraten auch geringer.

Daher habe ich mich mit diesem Thema beschäftigt, dabei allerdings zu einem Trick gegriffen. Da trimagische Quadrate automatisch auch bimagisch sind, habe ich bekannte trimagische Quadrate daraufhin untersucht, ob durch den Tausch von Zahlen zwar die trimagische Eigenschaft verloren geht, aber die Quadrate weiterhin bimagisch bleiben.

Wie bei den trimagischen Quadraten in Kapitel 12.1 werden in einer Zeile bzw. Spalte mehrere Zahlen vertauscht, bei denen die Summen und quadrierten Summen übereinstimmen. Liegen die Zahlen nicht auf den Diagonalen, können sie einfach ausgetauscht werden. Mit

$$62 + 26 + 112 + 139 + 87 + 9 = 435$$
$$83 + 119 + 33 + 6 + 58 + 136 = 435$$

und

$$62^2 + 26^2 + 112^2 + 139^2 + 87^2 + 9^2 = 44\,035$$
$$83^2 + 119^2 + 33^2 + 6^2 + 58^2 + 136^2 = 44\,035$$

wird durch den Austausch von 12 Zahlen aus dem trimagischen Quadrat in Abbildung 11.241 ein bimagisches erzeugt.

4	98	41	142	103	55	45	51	114	120	17	80
46	13	121	86	32	16	126	39	60	105	95	131
101	76	48	84	137	144	73	2	68	49	81	7
118	54	127	52	15	71	134	78	5	35	115	66
83	119	33	6	57	89	58	36	124	107	136	22
117	12	29	92	82	111	20	122	37	135	43	70
28	133	116	53	63	34	125	23	108	10	102	75
62	26	112	139	88	56	87	109	21	38	9	123
27	91	18	93	130	74	11	67	140	110	30	79
44	69	97	61	8	1	72	143	77	96	64	138
99	132	24	59	113	129	100	94	31	25	50	14
141	47	104	3	42	90	19	106	85	40	128	65

a) trimagisch

4	98	41	142	103	55	45	51	114	120	17	80
46	13	121	86	32	16	126	39	60	105	95	131
101	76	48	84	137	144	73	2	68	49	81	7
118	54	127	52	15	71	134	78	5	35	115	66
62	26	112	139	57	89	87	36	124	107	9	22
117	12	29	92	82	111	20	122	37	135	43	70
28	133	116	53	63	34	125	23	108	10	102	75
83	119	33	6	88	56	58	109	21	38	136	123
27	91	18	93	130	74	11	67	140	110	30	79
44	69	97	61	8	1	72	143	77	96	64	138
99	132	24	59	113	129	100	94	31	25	50	14
141	47	104	3	42	90	19	106	85	40	128	65

b) bimagisch

Abb. 11.241: Konstruktion eines bimagischen Quadrates der Ordnung $n = 12$ (Danielsson)

Neben Zahlen in Zeilen können auch Zahlen in den Spalten ausgetauscht werden. Im Beispiel der Abbildung 11.242 sind gleich 40 Zahlen ausgetauscht worden. Die Summen der Vierergruppen betragen 296 bzw. 580 und die quadrierten Zahlen besitzen die Summen 29 710, 61 160 bzw. 57 200.

12	67	53	137	6	44	91	109	46	114	63	128
96	33	124	39	47	127	52	38	113	1	74	126
102	104	34	136	48	5	35	85	135	83	22	81
86	94	72	55	20	79	4	29	45	129	138	119
56	24	134	88	115	70	105	13	15	77	131	42
3	143	118	50	84	117	23	25	65	58	76	108
142	2	27	95	61	28	122	120	80	87	69	37
89	121	11	57	30	75	40	132	130	68	14	103
59	51	73	90	125	66	141	116	100	16	7	26
43	41	111	9	97	140	110	60	10	62	123	64
49	112	21	106	98	18	93	107	32	144	71	19
133	78	92	8	139	101	54	36	99	31	82	17

a) trimagisch

12	67	53	46	6	44	91	109	137	114	63	128
96	33	124	113	47	52	127	38	39	1	74	126
102	104	34	135	48	35	5	85	136	83	22	81
86	94	72	55	20	4	79	29	45	129	138	119
56	131	134	15	115	105	70	13	88	77	24	42
3	76	118	50	84	117	23	25	65	58	143	108
142	2	27	95	61	28	122	120	80	87	69	37
89	121	11	130	30	40	75	132	57	68	14	103
59	7	73	90	125	141	66	116	100	16	51	26
43	41	111	10	97	110	140	60	9	62	123	64
49	112	21	32	98	93	18	107	106	144	71	19
133	82	92	99	139	101	54	36	8	31	78	17

b) bimagisch

Abb. 11.242: Bimagisches Quadrat durch Austausch von 40 Zahlen (Danielsson)

Im dritten Beispiel sind jeweils drei Gruppen von drei Zahlen untereinander vertauscht worden. Die drei Zahlen in den oberen Gruppen besitzen die Summen 306 und 33 074, während die unteren Gruppen die Summen 129 und 7409 besitzen.

4	59	84	24	119	116	64	123	135	25	67	50
107	30	122	49	127	27	102	76	45	128	52	5
68	54	31	117	14	133	88	101	134	51	72	7
79	21	3	32	48	71	104	103	92	139	132	46
126	89	83	129	60	37	136	15	58	80	2	55
33	144	106	47	105	111	8	20	109	82	35	70
112	1	39	98	40	34	137	125	36	63	110	75
19	56	62	16	85	108	9	130	87	65	143	90
66	124	142	113	97	74	41	42	53	6	13	99
77	91	114	28	131	12	57	44	11	94	73	138
38	115	23	96	18	118	43	69	100	17	93	140
141	86	61	121	26	29	81	22	10	120	78	95

a) trimagisch

4	59	84	24	119	133	64	101	135	25	72	50
107	30	122	49	127	27	102	76	45	128	52	5
68	54	31	117	14	71	88	103	134	51	132	7
79	21	3	32	48	116	104	123	92	139	67	46
126	89	83	129	60	37	136	15	58	80	2	55
33	144	106	47	105	111	8	20	109	82	35	70
112	1	39	98	40	34	137	125	36	63	110	75
19	56	62	16	85	108	9	130	87	65	143	90
66	124	142	113	97	12	41	44	53	6	73	99
77	91	114	28	131	29	57	22	11	94	78	138
38	115	23	96	18	118	43	69	100	17	93	140
141	86	61	121	26	74	81	42	10	120	13	95

b) bimagisch

Abb. 11.243: Austausch von mehreren Zahlengruppen (Danielsson)

Ich habe insgesamt 11 068 neue bimagische Quadrate in LDR-Darstellung[57] gefunden. Aus jedem dieser Quadrate lassen sich durch Zeilen-Spalten-Transformationen $\frac{12!!}{2} = 23\,040$ weitere unterschiedliche bimagische Quadrate dieser Ordnung erzeugen.

Bei 33 der Quadrate in LDR-Darstellung haben die Zahlen in den vier Quadranten die gleichen Summen 2610. Bei 31 von ihnen ist wie in Abbildung 11.244 sogar die Summe der quadrierten Zahlen in den Quadranten mit 251 430 gleich.

1	73	70	55	140	80	136	13	122	58	71	51
41	24	97	10	42	139	30	91	59	116	96	125
33	2	35	95	124	105	45	68	142	84	106	31
66	113	14	56	37	127	93	99	19	16	102	128
62	109	57	130	60	92	107	11	67	138	12	25
123	64	4	118	101	111	26	117	69	47	8	82
22	81	141	27	44	34	119	28	76	98	137	63
83	36	88	15	85	53	38	134	78	7	133	120
79	32	131	89	108	18	52	46	126	129	43	17
112	143	110	50	21	40	100	77	3	61	39	114
104	121	48	135	103	6	115	54	86	29	49	20
144	72	75	90	5	65	9	132	23	87	74	94

12	67	53	137	6	101	54	36	99	114	63	128
96	33	21	39	47	127	93	38	32	144	74	126
43	104	34	136	48	5	35	60	135	83	123	64
86	94	73	55	125	66	4	29	45	129	138	26
56	24	134	88	115	70	105	13	15	77	131	42
3	143	118	50	84	117	23	25	65	58	76	108
142	2	27	95	61	28	122	120	80	87	69	37
89	121	11	57	30	75	40	132	130	68	14	103
59	51	72	90	20	79	141	116	100	16	7	119
102	41	111	9	97	140	110	85	10	62	22	81
49	112	124	106	98	18	52	107	113	1	71	19
133	78	92	8	139	44	91	109	46	31	82	17

Abb. 11.244: Gleiche Summen der Zahlen in den Quadranten (Danielsson)

[57] siehe Kapitel 18.6

11.3.4 Ordnung 13

Das erste bimagische Quadrat der Ordnung 13 wurde im Jahre 2006 von Chen Qinwu und Chen Mutian aus China gefunden.[58]

126	49	10	60	149	140	90	8	50	123	86	157	57
143	103	117	4	105	166	41	128	39	5	78	75	101
35	33	73	94	87	37	9	139	136	168	146	51	97
107	141	76	40	55	12	148	98	129	7	162	72	58
138	121	142	79	13	102	74	6	108	69	2	106	145
167	144	68	104	23	31	135	19	119	77	59	127	32
36	122	34	30	130	47	85	96	1	99	115	154	156
14	3	80	95	150	91	116	153	124	133	66	62	18
82	25	53	89	67	113	165	84	20	26	155	161	65
52	125	114	151	24	92	11	134	132	137	70	48	15
42	100	158	38	160	164	93	45	44	63	111	16	71
43	21	163	152	81	64	29	83	147	110	27	54	131
120	118	17	169	61	46	109	112	56	88	28	22	159

Abb. 11.245: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 13$ (Chen Qinwu - Chen Mutian)

Nur 3 Tage später und vollkommen unabhängig voneinander konstruierte Jacques Guéron, ein französischer Mathematiklehrer, ein weiteres bimagisches Quadrat dieser Ordnung.[59]

109	62	75	149	121	137	43	163	101	7	14	36	88
71	93	54	39	80	155	46	13	105	119	141	169	20
134	95	6	151	66	83	167	32	110	52	55	128	26
96	162	61	42	143	35	126	72	87	9	144	112	16
85	44	150	130	139	157	59	11	17	33	97	116	67
78	48	158	27	2	56	123	89	145	104	22	138	115
64	156	84	77	41	100	159	122	8	114	34	15	131
4	53	70	50	153	91	30	103	135	160	124	108	24
40	148	166	98	60	18	37	111	10	86	129	69	133
99	28	125	90	47	1	117	146	73	132	21	65	161
3	29	79	76	147	127	49	23	165	63	136	106	102
168	45	19	12	81	94	118	113	57	152	68	38	140
154	142	58	164	25	51	31	107	92	74	120	5	82

Abb. 11.246: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 13$ (Guéron)

[58] Chen Qinwu - Chen Mutian [88]
[59] Guéron [165]

11.3.5 Ordnung 14

Im Dezember 2005 konstruierte Jacques Guéron ein Quadrat der Ordnung $n = 14$, bei dem alle Zeilen und Spalten, aber leider nur eine Diagonale bimagisch sind. Im Januar 2006 verwendete Chen Qinwu genau diese Spalten, ordnete allerdings die Zahlen in einer anderen Reihenfolge an und erhielt ein vollständiges bimagisches Quadrat der Ordnung 14.[60]

160	188	93	128	45	30	92	168	6	141	28	118	135	47
82	148	192	19	64	50	72	48	67	119	178	32	185	123
163	139	152	187	55	76	7	13	85	137	116	153	38	58
162	61	37	56	124	182	190	34	143	52	44	94	157	43
46	3	25	129	181	112	133	120	81	77	107	170	175	20
80	1	84	196	191	23	114	130	142	51	91	88	42	146
15	87	41	154	39	176	83	159	104	127	155	164	5	70
140	40	63	69	174	150	108	145	177	17	65	35	31	165
131	90	101	86	149	96	138	4	105	18	195	22	60	184
156	89	167	12	95	113	74	62	194	16	186	49	66	100
122	147	106	73	54	75	14	183	29	171	33	193	111	68
103	110	11	98	8	125	189	109	59	172	71	27	117	180
9	179	134	36	121	169	21	126	161	115	53	132	99	24
10	97	173	136	79	2	144	78	26	166	57	102	158	151

Abb. 11.247: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 14$ (Chen Qinwu - Guéron)

11.3.6 Ordnung 15

Das erste bimagische Quadrat der Ordnung $n = 15$ stammt aus dem Jahre 2006 und wurde von Chen Qinwu erschaffen.[61]

[60] Chen Qinwu - Guéron [471]
[61] Chen Qinwu [469]

160	28	194	146	141	58	102	217	16	101	43	31	187	92	179
169	63	214	129	132	38	144	93	216	84	23	48	83	44	215
185	46	106	107	99	18	52	164	53	126	177	189	220	5	148
202	204	155	59	65	1	86	150	15	67	61	156	170	114	190
224	8	172	96	40	75	111	200	191	25	60	68	121	147	157
135	45	88	87	77	212	122	184	73	117	3	13	209	131	199
98	162	205	4	116	176	19	175	33	137	197	30	154	81	108
136	171	123	20	7	192	74	113	152	34	219	206	103	55	90
118	145	72	196	29	89	193	51	207	50	110	222	21	64	128
27	95	17	213	223	109	153	42	104	14	149	139	138	181	91
69	79	105	158	166	201	35	26	115	151	186	130	54	218	2
36	112	56	70	165	159	211	76	140	225	161	167	71	22	24
78	221	6	37	49	100	173	62	174	208	127	119	120	180	41
11	182	143	178	203	142	10	133	82	188	94	97	12	163	57
47	134	39	195	183	125	210	9	124	168	85	80	32	198	66

Abb. 11.248: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 15$ (Chen Qinwu)

11.4 Ordnung n = 16

11.4.1 Tarry

Ein bekanntes bimagisches Quadrat stammt von Gaston Tarry, der es 1903 in der *Revue Scientifique* vorstellte.[62] Das besondere an dem bimagischen Quadrat aus Abbildung 11.249 besteht darin, dass alle 16 Zeilen sogar trimagisch mit $S16^3 = 67\,634\,176$ sind.[63]

1	52	86	103	16	61	91	106	241	196	166	151	256	205	171	154
102	87	49	4	107	90	64	13	150	167	193	244	155	170	208	253
55	6	100	81	58	11	109	96	199	246	148	161	202	251	157	176
84	97	7	54	93	112	10	59	164	145	247	198	173	160	250	203
249	204	174	159	248	197	163	146	9	60	94	111	8	53	83	98
158	175	201	252	147	162	200	245	110	95	57	12	99	82	56	5
207	254	156	169	194	243	149	168	63	14	108	89	50	3	101	88
172	153	255	206	165	152	242	195	92	105	15	62	85	104	2	51
128	77	43	26	113	68	38	23	144	189	219	234	129	180	214	231
27	42	80	125	22	39	65	116	235	218	192	141	230	215	177	132
74	123	29	48	71	118	20	33	186	139	237	224	183	134	228	209
45	32	122	75	36	17	119	70	221	240	138	187	212	225	135	182
136	181	211	226	137	188	222	239	120	69	35	18	121	76	46	31
227	210	184	133	238	223	185	140	19	34	72	117	30	47	73	124
178	131	229	216	191	142	236	217	66	115	21	40	79	126	28	41
213	232	130	179	220	233	143	190	37	24	114	67	44	25	127	78

Abb. 11.249: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 16$ (Tarry)

11.4.2 Tarry – Cazalas

Um bimagische Quadrate der Ordnung $n = p^4$ zu erzeugen, verwendet Cazalas arithmetische Serien der Form[64]

$$(r_1 \;\; r_2 \;\; r_3 \;\; r_4 \;\; s_1 \;\; s_2 \;\; s_3 \;\; s_4)_2$$

Für die Ordnung $n = 16$ gilt $p = 2$ und die Serien bilden damit eine Tabelle mit 16 Zeilen und Spalten. Sie ist wie Tabelle 11.18 in Kapitel 11.1.7 aufgebaut, wobei acht weitere Zeilen und Spalten hinzukommen. Bei den Zeilen bleiben die ersten acht Einträge in den linken Zellen erhalten und werden bei den acht neuen darunter liegenden neuen Einträgen jeweils um den Summanden s_4 erweitert.

[62] Tarry [537] S. 408 – 409
[63] siehe auch Boyer [54]
[64] Cazalas [79] S. 97 – 128

Ebenso bleiben in der oberen Zeile die ersten acht Einträge erhalten und bei den neu hinzugekommenen acht Einträgen werden die alten Terme jeweils um den Summanden r_4 ergänzt. Im ersten Beispiel werden die arithmetischen Serien

$$\begin{aligned}(r_1\ \ r_2\ \ r_3\ \ r_4)_2 &= (11001001\ \ 10011010\ \ 11101010\ \ 11000110)_2 \\ (s_1\ \ s_2\ \ s_3\ \ s_4)_2 &= (01000011\ \ 11110100\ \ 01101101\ \ 01111000)_2\end{aligned}$$

verwendet. Ein Auszug der hierdurch entstehenden Tabelle ist in Abbildung 11.34 dargestellt.

	0	r_1	r_2	r_2+r_1	r_3	$\cdots$	r_4	r_4+r_1	r_4+r_2	$\cdots$
0	00000000	11001001	10011010	01010011	11101010	$\cdots$	11000110	00001111	01011100	$\cdots$
s_1	01000011	10001010	11011001	00010000	10101001	$\cdots$	10000101	01001100	00011111	$\cdots$
s_2	11110100	00111101	01101110	10100111	00011110	$\cdots$	00110010	11111011	10101000	$\cdots$
s_2+s_1	10110111	01111110	00101101	11100100	01011101	$\cdots$	01110001	10111000	11101011	$\cdots$
s_3	01101101	10100100	11110111	00111110	10000111	$\cdots$	10101011	01100010	00110001	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$s4$	01111000	10110001	11100010	00101011	10010010	$\cdots$	10111110	01110111	00100100	$\cdots$
$s4+s_1$	00111011	11110010	10100001	01101000	11010001	$\cdots$	11111101	00110100	01100111	$\cdots$
$s4+s_2$	10001100	01000101	00010110	11011111	01100110	$\cdots$	01001010	10000011	11010000	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

Tab. 11.34: Tabelle mit den arithmetischen Serien

Diese Tabelle kann auch vollständig dargestellt werden, wenn man die Zahlen nicht im Zweiersystem, sondern im Zehnersystem angibt. Dann lauten die beiden Serien

$$\begin{aligned}(r_1\ \ r_2\ \ r_3\ \ r_4)_{10} &= (201\ \ 154\ \ 234\ \ 198)_{10} \\ (s_1\ \ s_2\ \ s_3\ \ s_4)_{10} &= (67\ \ 244\ \ 109\ \ 120)_{10}\end{aligned}$$

In dieser Schreibweise ergibt sich das Quadrat aus Abbildung 11.250. Erhöht man abschließend alle Zahlen um 1, entsteht das bimagische Quadrat aus Abbildung 11.251.

Natürlich lassen sich die Zahlen für die arithmetischen Serien nicht beliebig wählen und miteinander kombinieren. Cazalas arbeitet ähnlich wie in Kapitel 11.2.4 wieder mit Determinanten und stellt mit Hilfe dieser Determinanten Bedingungen für geeignete arithmetische Serien auf.

Mit zusätzlichen Bedingungen lassen sich mit diesem Verfahren auch pandiagonale bimagische Quadrate erzeugen. Mit den arithmetischen Serien

$$\begin{aligned}(r_1\ \ r_2\ \ r_3\ \ r_4) &= (00100011\ \ 11011001\ \ 00011111\ \ 10001000)_2 = (35\ \ 217\ \ 31\ \ 136)_{10} \\ (s_1\ \ s_2\ \ s_3\ \ s_4) &= (11000000\ \ 01110011\ \ 10101110\ \ 01000111)_2 = (192\ \ 115\ \ 174\ \ 71)_{10}\end{aligned}$$

wird beispielsweise das pandiagonale bimagische Quadrat aus Abbildung 11.252 erzeugt.

In vielen Fällen lassen sich alle Einträge der aus den arithmetischen Serien entstehenden Tabelle mit einer beliebigen Zahl kleiner als 256 `XOR` verknüpfen, so dass weitere pandiagonale bimagische Quadrate entstehen. Im Beispiel der Abbildung 11.253 ist die Verknüpfungszahl

$$(01101001)_2 = (105)_{10}$$

gewählt worden.

	0	r_1	r_2		r_3				r_4							
0	0	201	154	83	234	35	112	185	198	15	92	149	44	229	182	127
s_1	67	138	217	16	169	96	51	250	133	76	31	214	111	166	245	60
s_2	244	61	110	167	30	215	132	77	50	251	168	97	216	17	66	139
	183	126	45	228	93	148	199	14	113	184	235	34	155	82	1	200
s_3	109	164	247	62	135	78	29	212	171	98	49	248	65	136	219	18
	46	231	180	125	196	13	94	151	232	33	114	187	2	203	152	81
	153	80	3	202	115	186	233	32	95	150	197	12	181	124	47	230
	218	19	64	137	48	249	170	99	28	213	134	79	246	63	108	165
s_4	120	177	226	43	146	91	8	193	190	119	36	237	84	157	206	7
	59	242	161	104	209	24	75	130	253	52	103	174	23	222	141	68
	140	69	22	223	102	175	252	53	74	131	208	25	160	105	58	243
	207	6	85	156	37	236	191	118	9	192	147	90	227	42	121	176
	21	220	143	70	255	54	101	172	211	26	73	128	57	240	163	106
	86	159	204	5	188	117	38	239	144	89	10	195	122	179	224	41
	225	40	123	178	11	194	145	88	39	238	189	116	205	4	87	158
	162	107	56	241	72	129	210	27	100	173	254	55	142	71	20	221

Abb. 11.250: Das Ergebnis der arithmetischen Serien im Zehnersystem

1	202	155	84	235	36	113	186	199	16	93	150	45	230	183	128
68	139	218	17	170	97	52	251	134	77	32	215	112	167	246	61
245	62	111	168	31	216	133	78	51	252	169	98	217	18	67	140
184	127	46	229	94	149	200	15	114	185	236	35	156	83	2	201
110	165	248	63	136	79	30	213	172	99	50	249	66	137	220	19
47	232	181	126	197	14	95	152	233	34	115	188	3	204	153	82
154	81	4	203	116	187	234	33	96	151	198	13	182	125	48	231
219	20	65	138	49	250	171	100	29	214	135	80	247	64	109	166
121	178	227	44	147	92	9	194	191	120	37	238	85	158	207	8
60	243	162	105	210	25	76	131	254	53	104	175	24	223	142	69
141	70	23	224	103	176	253	54	75	132	209	26	161	106	59	244
208	7	86	157	38	237	192	119	10	193	148	91	228	43	122	177
22	221	144	71	256	55	102	173	212	27	74	129	58	241	164	107
87	160	205	6	189	118	39	240	145	90	11	196	123	180	225	42
226	41	124	179	12	195	146	89	40	239	190	117	206	5	88	159
163	108	57	242	73	130	211	28	101	174	255	56	143	72	21	222

Abb. 11.251: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 16$ (Tarry - Cazalas, Beispiel 1)

1	36	218	251	32	61	199	230	137	172	82	115	152	181	79	110
193	228	26	59	224	253	7	38	73	108	146	179	88	117	143	174
116	81	171	138	109	80	182	151	252	217	35	2	229	200	62	31
180	145	107	74	173	144	118	87	60	25	227	194	37	8	254	223
175	142	120	85	178	147	105	76	39	6	256	221	58	27	225	196
111	78	184	149	114	83	169	140	231	198	64	29	250	219	33	4
222	255	5	40	195	226	28	57	86	119	141	176	75	106	148	177
30	63	197	232	3	34	220	249	150	183	77	112	139	170	84	113
72	101	159	190	89	124	130	163	208	237	23	54	209	244	10	43
136	165	95	126	153	188	66	99	16	45	215	246	17	52	202	235
53	24	238	207	44	9	243	210	189	160	102	71	164	129	123	90
245	216	46	15	236	201	51	18	125	96	166	135	100	65	187	154
234	203	49	20	247	214	48	13	98	67	185	156	127	94	168	133
42	11	241	212	55	22	240	205	162	131	121	92	191	158	104	69
155	186	68	97	134	167	93	128	19	50	204	233	14	47	213	248
91	122	132	161	70	103	157	192	211	242	12	41	206	239	21	56

Abb. 11.252: Pandiagonales bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 16$ (Tarry - Cazalas, Beispiel 2)

106	75	177	148	119	86	176	141	226	195	57	28	255	222	40	5
170	139	113	84	183	150	112	77	34	3	249	220	63	30	232	197
27	58	196	225	6	39	221	256	147	178	76	105	142	175	85	120
219	250	4	33	198	231	29	64	83	114	140	169	78	111	149	184
200	229	31	62	217	252	2	35	80	109	151	182	81	116	138	171
8	37	223	254	25	60	194	227	144	173	87	118	145	180	74	107
181	152	110	79	172	137	115	82	61	32	230	199	36	1	251	218
117	88	174	143	108	73	179	146	253	224	38	7	228	193	59	26
47	14	248	213	50	19	233	204	167	134	128	93	186	155	97	68
239	206	56	21	242	211	41	12	103	70	192	157	122	91	161	132
94	127	133	168	67	98	156	185	214	247	13	48	203	234	20	49
158	191	69	104	131	162	92	121	22	55	205	240	11	42	212	241
129	164	90	123	160	189	71	102	9	44	210	243	24	53	207	238
65	100	154	187	96	125	135	166	201	236	18	51	216	245	15	46
244	209	43	10	237	208	54	23	124	89	163	130	101	72	190	159
52	17	235	202	45	16	246	215	188	153	99	66	165	136	126	95

Abb. 11.253: Pandiagonales bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 16$ (Tarry - Cazalas, Beispiel 3)

11.4.3 Viricel – Boyer

André Viricel hat zusammen mit Christian Boyer ein Verfahren entwickelt, mit dem sie tetra- und pentamagische Quadrate konstruiert haben.[65] Ihr Verfahren ist aber auch geeignet, um bimagische Quadrate der Ordnung $n = 16$ zu erzeugen. Es ist ein bisschen von den Ideen von Cazalas beeinflusst und wird hier für den Spezialfall der Ordnung 16 beschrieben.

Alle Zahlen werden im Hexadezimalsystem, also dem Zahlensystem zur Basis 16, notiert. Da man in diesem Zahlensystem 16 verschiedene Ziffern benötigt, werden außer den aus dem Dezimalsystem bekannten zehn Ziffern noch die Buchstaben A bis F benutzt.

$$A = 10 \qquad B = 11 \qquad C = 12 \qquad D = 13 \qquad E = 14 \qquad F = 15$$

Für die Zahl 179 aus dem Dezimalsystem ergibt sich mit

$$179 = 11 \cdot 16 + 3 \cdot 1$$

die hexadezimale Darstellung B3. Weiterhin benutzen sie zwei besondere Verknüpfungen von Zahlen, die *numerische Addition* $\oplus$ und die *numerische Multiplikation* $\odot$. Beide Verknüpfungen werden immer im Zweiersystem (Binärsystem) ausgeführt.

Bei der numerischen Addition $\oplus$ handelt es sich um die bekannte logische XOR-Verknüpfung, die mit *entweder oder* beschrieben werden kann. Bei zwei Eingabewerten von 0 und 1 ist das Ergebnis genau dann 1, wenn eine Zahl 1 und die andere Zahl 0 ist oder umgekehrt. Die Verknüpfungstabelle für XOR sieht damit folgendermaßen aus:

a	b	$a \oplus b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Tab. 11.35: Verknüpfungstabelle für die numerische Addition $\oplus$

Diese Addition soll am Beispiel der Zahlen 77 und 110 demonstriert werden, die hier auch im Hexadezimalsystem sowie im Binärsystem angegeben werden.

dezimal	hexadezimal	binär
77	4D	01001101
110	6E	01101110

Die eigentliche Addition wird im Binärsystem durchgeführt und die Durchführung sowie das Ergebnis sind in Tabelle 11.36 dargestellt.

$$\begin{array}{rr} & 01001101 \\ \oplus & 01101110 \\ \hline & 00100011 \end{array}$$

Tab. 11.36: Numerische Addition 77 $\oplus$ 110

[65] Viricel und Boyer [52] S. 98 – 102

In den Schreibweisen der drei Zahlensysteme lautet diese Addition damit:

$$77 \oplus 110 = 35 \qquad 4D \oplus 6E = 23 \qquad 01001101 \oplus 01101110 = 00100011$$

Die numerische Multiplikation $\odot$ wird zunächst wie die normale schriftliche Multiplikation ausgeführt, nur dass nicht die normale Addition, sondern die numerische Addition verwendet wird. Danach wird das Ergebnis allerdings in einem zweiten Schritt an den führenden Stellen mit Nullen so aufgefüllt, dass es aus genau acht Ziffern besteht. Diese Ziffernfolge wird in zwei Hälften mit jeweils vier Ziffern aufgeteilt, die dann noch einmal numerisch addiert werden.

Im ersten Beispiel wird das Produkt der Zahlen 7 und 14 berechnet, die im Binärsystem 0111 bzw. 1110 lauten. Zunächst wird der erste Schritt der Multiplikation durchgeführt, was im Beispiel mit dem Verknüpfungssymbol $\circ$ dargestellt wird. Anschließend folgt im zweiten Schritt die numerische Addition der beiden Hälften des Zwischenergebnisses und erhält das Ergebnis in Tabelle 11.37.

```
0111 ∘ 1110
-----------
0111
 0111
  0111
   0000
-----------
0101010

    0010
⊕   1010
--------
    1000
```

Tab. 11.37: Numerische Multiplikation 7 $\odot$ 14

In den Schreibweisen der drei Zahlensysteme lautet diese Multiplikation:

$$7 \odot 14 = 8 \qquad 07 \odot 0E = 08 \qquad 0111 \odot 1110 = 1000$$

In einem zweiten Beispiel werden in Tabelle 11.38 die Zahlen 5 und 12 multipliziert.

```
0101 ∘ 1100
-----------
0101
 0101
  0000
   0000
-----------
0111100

    0011
⊕   1100
--------
    1111
```

Tab. 11.38: Numerische Multiplikation 5 $\odot$ 12

In den Schreibweisen der drei Zahlensysteme lautet diese Multiplikation damit:

$$5 \odot 12 = 15 \qquad 05 \odot 0C = 0F \qquad 0101 \odot 1100 = 1111$$

Viricel und Boyer füllen das Zielquadrat mit Zahlen, die mit den beiden beschriebenen Verknüpfungen sukzessive berechnet werden. Dazu wählen sie zwei Zahlen z_1 und z_2 und tragen zunächst in der linken oberen Ecke die Zahl 0 ein. In der oberen Zeile tragen sie dann von links nach rechts die auf z_1 basierende Zahlenfolge im Hexadezimalsystem ein.

$$0 \qquad z_1 \qquad 2 \odot z_1 \qquad 3 \odot z_1 \qquad \ldots \qquad (n-1) \odot z_1$$

Entsprechend wird die linke Spalte von oben nach unten mit der Zahlenfolge gefüllt, die auf z_2 basiert.

$$0 \qquad z_2 \qquad 2 \odot z_2 \qquad 3 \odot z_2 \qquad \ldots \qquad (n-1) \odot z_2$$

Die restlichen Zahlen des Quadrates ergeben sich dann durch die numerische Addition der zugehörigen Zahlen aus der oberen Zeile und der linken Spalte.

0	z_1	$2 \odot z_1$	$3 \odot z_1$	$\cdots$	$15 \odot z_1$
z_2	$z_2 \oplus z_1$	$z_2 \oplus 2 \odot z_1$	$z_2 \oplus 3 \odot z_1$	$\cdots$	$z_2 \oplus 15 \odot z_1$
$2 \odot z_2$	$2 \odot z_2 \oplus z_1$	$2 \odot z_2 \oplus 2 \odot z_1$	$2 \odot z_2 \oplus 3 \odot z_1$	$\cdots$	$2 \odot z_2 \oplus 15 \odot z_1$
$3 \odot z_2$	$3 \odot z_2 \oplus z_1$	$3 \odot z_2 \oplus 2 \odot z_1$	$3 \odot z_2 \oplus 3 \odot z_1$	$\cdots$	$3 \odot z_2 \oplus 15 \odot z_1$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$15 \odot z_2$	$15 \odot z_2 \oplus z_1$	$15 \odot z_2 \oplus 2 \odot z_1$	$15 \odot z_2 \oplus 3 \odot z_1$	$\cdots$	$15 \odot z_2 \oplus 15 \odot z_1$

Tab. 11.39: Additionstabelle mit den Ausgangszahlen z_1 und z_2

Wählt man zum Beispiel die Ausgangszahlen $z_1 = 77$ (hexadezimal 4D) und $z_2 = 110$ (hexadezimal 6E), werden zunächst die obere Zeile und die linke Spalte gefüllt. Die restlichen Zahlen des Quadrates ergeben sich dann durch die numerische Addition der bereits vorhandenen Zahlen und werden in Abbildung 11.254 dargestellt. Die Addition $4D \oplus 6E = 23$ ist beispielhaft bereits auf den vorangegangenen Seiten behandelt worden.

00	4D	8B	C6	17	5A	9C	D1	2E	63	A5	E8	39	74	B2	FF
6E	23	E5	A8	79	34	F2	BF	40	0D	CB	86	57	1A	DC	91
CD	80	46	0B	DA	97	51	1C	E3	AE	68	25	F4	B9	7F	32
A3	EE	28	65	B4	F9	3F	72	8D	C0	06	4B	9A	D7	11	5C
9B	D6	10	5D	8C	C1	07	4A	B5	F8	3E	73	A2	EF	29	64
F5	B8	7E	33	E2	AF	69	24	DB	96	50	1D	CC	81	47	0A
56	1B	DD	90	41	0C	CA	87	78	35	F3	BE	6F	22	E4	A9
38	75	B3	FE	2F	62	A4	E9	16	5B	9D	D0	01	4C	8A	C7
37	7A	BC	F1	20	6D	AB	E6	19	54	92	DF	0E	43	85	C8
59	14	D2	9F	4E	03	C5	88	77	3A	FC	B1	60	2D	EB	A6
FA	B7	71	3C	ED	A0	66	2B	D4	99	5F	12	C3	8E	48	05
94	D9	1F	52	83	CE	08	45	BA	F7	31	7C	AD	E0	26	6B
AC	E1	27	6A	BB	F6	30	7D	82	CF	09	44	95	D8	1E	53
C2	8F	49	04	D5	98	5E	13	EC	A1	67	2A	FB	B6	70	3D
61	2C	EA	A7	76	3B	FD	B0	4F	02	C4	89	58	15	D3	9E
0F	42	84	C9	18	55	93	DE	21	6C	AA	E7	36	7B	BD	F0

Abb. 11.254: Berechnetes Quadrat mit den Zahlen von 0 bis 255 im Hexadezimalsystem

Diese Zahlen werden jetzt noch in das Dezimalsystem umgewandelt, wobei sie alle um 1 erhöht werden. Damit entsteht das bimagische Quadrat aus Abbildung 11.255, bei dem die komplementären Zahlen horizontal symmetrisch liegen.

1	78	140	199	24	91	157	210	47	100	166	233	58	117	179	256
111	36	230	169	122	53	243	192	65	14	204	135	88	27	221	146
206	129	71	12	219	152	82	29	228	175	105	38	245	186	128	51
164	239	41	102	181	250	64	115	142	193	7	76	155	216	18	93
156	215	17	94	141	194	8	75	182	249	63	116	163	240	42	101
246	185	127	52	227	176	106	37	220	151	81	30	205	130	72	11
87	28	222	145	66	13	203	136	121	54	244	191	112	35	229	170
57	118	180	255	48	99	165	234	23	92	158	209	2	77	139	200
56	123	189	242	33	110	172	231	26	85	147	224	15	68	134	201
90	21	211	160	79	4	198	137	120	59	253	178	97	46	236	167
251	184	114	61	238	161	103	44	213	154	96	19	196	143	73	6
149	218	32	83	132	207	9	70	187	248	50	125	174	225	39	108
173	226	40	107	188	247	49	126	131	208	10	69	150	217	31	84
195	144	74	5	214	153	95	20	237	162	104	43	252	183	113	62
98	45	235	168	119	60	254	177	80	3	197	138	89	22	212	159
16	67	133	202	25	86	148	223	34	109	171	232	55	124	190	241

Abb. 11.255: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 16$ (Viricel - Boyer, Beispiel 1)

Ein zweites Beispiel soll das Verfahren noch einmal verdeutlichen. Als Ausgangszahlen werden dieses Mal $z_1 = 113$ (hexadezimal 71) und $z_2 = 233$ (hexadezimal E9) gewählt, so dass die obere Zeile die Zahlenfolge

$$00 \quad 71 \quad E2 \quad 93 \quad D4 \quad A5 \quad 36 \quad 47 \quad B8 \quad C9 \quad 5A \quad 2B \quad 6C \quad 1D \quad 8E \quad FF$$

und die linke Spalte die hexadezimalen Zahlen

$$00 \quad E9 \quad D3 \quad 3A \quad B6 \quad 5F \quad 65 \quad 8C \quad 7C \quad 95 \quad AF \quad 46 \quad CA \quad 23 \quad 19 \quad F0$$

enthält. Mit der Additionstabelle von Viricel und Boyer erhält man dann das Quadrat mit den hexadezimalen Zahlen von 0 bis 255 in Abbildung 11.256. Wandelt man diese Zahlen wieder in das Dezimalsystem um und erhöht dabei alle Zahlen um 1, entsteht das bimagische Quadrat aus Abbildung 11.257.

Leider ist bei diesem Verfahren noch der mathematische Hintergrund für die Frage unklar, welche Ausgangszahlen zu einem bimagische Quadrat führen. Ich habe bei meinen Untersuchungen mit den Zahlen unter 256 insgesamt 3072 Kombinationen gefunden, die zu einem bimagischen Quadrat führen. Allerdings sind davon nur 1536 wirklich verschieden.

00	71	E2	93	D4	A5	36	47	B8	C9	5A	2B	6C	1D	8E	FF
E9	98	B	7A	3D	4C	DF	AE	51	20	B3	C2	85	F4	67	16
D3	A2	31	40	07	76	E5	94	6B	1A	89	F8	BF	CE	5D	2C
3A	4B	D8	A9	EE	9F	0C	7D	82	F3	60	11	56	27	B4	C5
B6	C7	54	25	62	13	80	F1	0E	7F	EC	9D	DA	AB	38	49
5F	2E	BD	CC	8B	FA	69	18	E7	96	05	74	33	42	D1	A0
65	14	87	F6	B1	C0	53	22	DD	AC	3F	4E	09	78	EB	9A
8C	FD	6E	1F	58	29	BA	CB	34	45	D6	A7	E0	91	02	73
7C	0D	9E	EF	A8	D9	4A	3B	C4	B5	26	57	10	61	F2	83
95	E4	77	06	41	30	A3	D2	2D	5C	CF	BE	F9	88	1B	6A
AF	DE	4D	3C	7B	0A	99	E8	17	66	F5	84	C3	B2	21	50
46	37	A4	D5	92	E3	70	01	FE	8F	1C	6D	2A	5B	C8	B9
CA	BB	28	59	1E	6F	FC	8D	72	03	90	E1	A6	D7	44	35
23	52	C1	B0	F7	86	15	64	9B	EA	79	08	4F	3E	AD	DC
19	68	FB	8A	CD	BC	2F	5E	A1	D0	43	32	75	04	97	E6
F0	81	12	63	24	55	C6	B7	48	39	AA	DB	9C	ED	7E	0F

Abb. 11.256: Berechnetes Quadrat mit den Zahlen von 0 bis 255 im Hexadezimalsystem

1	114	227	148	213	166	55	72	185	202	91	44	109	30	143	256
234	153	12	123	62	77	224	175	82	33	180	195	134	245	104	23
212	163	50	65	8	119	230	149	108	27	138	249	192	207	94	45
59	76	217	170	239	160	13	126	131	244	97	18	87	40	181	198
183	200	85	38	99	20	129	242	15	128	237	158	219	172	57	74
96	47	190	205	140	251	106	25	232	151	6	117	52	67	210	161
102	21	136	247	178	193	84	35	222	173	64	79	10	121	236	155
141	254	111	32	89	42	187	204	53	70	215	168	225	146	3	116
125	14	159	240	169	218	75	60	197	182	39	88	17	98	243	132
150	229	120	7	66	49	164	211	46	93	208	191	250	137	28	107
176	223	78	61	124	11	154	233	24	103	246	133	196	179	34	81
71	56	165	214	147	228	113	2	255	144	29	110	43	92	201	186
203	188	41	90	31	112	253	142	115	4	145	226	167	216	69	54
36	83	194	177	248	135	22	101	156	235	122	9	80	63	174	221
26	105	252	139	206	189	48	95	162	209	68	51	118	5	152	231
241	130	19	100	37	86	199	184	73	58	171	220	157	238	127	16

Abb. 11.257: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 16$ (Viricel - Boyer, Beispiel 2)

11.4.4 Hendricks

John R. Hendricks arbeitet bei seinem Verfahren[66] zur Konstruktion bimagischer Quadrate der Ordnung $n = 16$ mit dem algebraischen Muster aus Abbildung 11.258. Betrachtet man den Aufbau des Musterquadrates etwas näher, fällt auf, dass die Quadranten aus identischen Kombinationen von Buchstaben bestehen und sich nur durch die Klein- und Großschreibung unterscheiden.

Eh	Fc	Ge	Hb	Dd	Cg	Ba	Af	eh	fc	ge	hb	dd	cg	ba	af
Bg	Ad	Df	Ca	Gc	Hh	Eb	Fe	bg	ad	df	ca	gc	hh	eb	fe
HF	GA	FG	ED	AB	BE	CC	DH	hF	gA	fG	eD	aB	bE	cC	dH
CE	DB	AH	BC	FA	EF	HD	GG	cE	dB	aH	bC	fA	eF	hD	gG
AA	BF	CD	DG	HE	GB	FH	EC	aA	bF	cD	dG	hE	gB	fH	eC
FB	EE	HC	GH	CF	DA	AG	BD	fB	eE	hC	gH	cF	dA	aG	bD
Dc	Ch	Bb	Ae	Eg	Fd	Gf	Ha	dc	ch	bb	ae	eg	fd	gf	ha
Gd	Hg	Ea	Ff	Bh	Ac	De	Cb	gd	hg	ea	ff	bh	ac	de	cb
EH	FC	GE	HB	DD	CG	BA	AF	eH	fC	gE	hB	dD	cG	bA	aF
BG	AD	DF	CA	GC	HH	EB	FE	bG	aD	dF	cA	gC	hH	eB	fE
Hf	Ga	Fg	Ed	Ab	Be	Cc	Dh	hf	ga	fg	ed	ab	be	cc	dh
Ce	Db	Ah	Bc	Fa	Ef	Hd	Gg	ce	db	ah	bc	fa	ef	hd	gg
Aa	Bf	Cd	Dg	He	Gb	Fh	Ec	aa	bf	cd	dg	he	gb	fh	ec
Fb	Ee	Hc	Gh	Cf	Da	Ag	Bd	fb	ee	hc	gh	cf	da	ag	bd
DC	CH	BB	AE	EG	FD	GF	HA	dC	cH	bB	aE	eG	fD	gF	hA
GD	HG	EA	FF	BH	AC	DE	CB	gD	hG	eA	fF	bH	aC	dE	cB

Abb. 11.258: Algebraisches Muster

Die Buchstaben werden mit Zahlen belegt, wobei die zueinander gehörenden Groß- und Kleinbuchstaben addiert immer $n - 1 = 15$ ergeben müssen.

$$A + a = B + b = C + c = D + d = E + e = F + f = G + g = H + h = 15$$

Weiterhin benötigt man eine Zerlegung der Zahlen von 0 bis 15 in zwei Gruppen, deren Summe jeweils 60 und deren Summe der quadrierten Zahlen immer 620 beträgt. Insgesamt gibt es acht dieser Zerlegungen.

0	1	6	7	10	11	12	13
0	2	5	7	9	11	12	14
0	3	4	7	9	10	13	14
0	3	5	6	8	11	13	14
1	2	4	7	9	10	12	15
1	2	5	6	8	11	12	15
1	3	4	6	8	10	13	15
2	3	4	5	8	9	14	15

Tab. 11.40: Mögliche Zerlegungen der Zahlen 0 bis 15

[66] Hendricks [196] S. 104 – 106

So ergeben beispielsweise die Zahlen der oberen Zeile addiert die geforderten Summen 60 bzw. 620.

$$0 + 1 + 6 + 7 + 10 + 11 + 12 + 13 = 60$$
$$0^2 + 1^2 + 6^2 + 7^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 = 620$$

Mit den Zahlen einer Gruppe, sind auch die Zahlen der zweiten Gruppe eindeutig bestimmt, da sie aus den zu $n - 1 = 15$ komplementären Zahlen besteht.

$$2 + 3 + 4 + 5 + 8 + 9 + 14 + 15 = 60$$
$$2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 8^2 + 9^2 + 14^2 + 15^2 = 620$$

Eine beliebige der beiden Gruppen wird für die Belegung der Großbuchstaben gewählt, die andere für die Kleinbuchstaben. In beiden Fällen können die acht Zahlen einer Gruppe beliebig permutiert werden.

Mit den Zahlen aus den beiden Gruppen, die sich aus der oberen Zeile der Tabelle ergeben, ergibt sich mit der angegebenen Belegung das bimagische Quadrat aus Abbildung 11.259.

Belegung															
a	b	c	d	e	f	g	h	A	B	C	D	E	F	G	H
7	6	13	1	0	11	10	12	8	9	2	14	15	4	5	3

253	78	81	55	226	43	152	140	13	190	161	199	18	219	104	124
155	130	236	40	94	61	247	65	107	114	28	216	174	205	7	177
53	89	70	255	138	160	35	228	197	169	182	15	122	112	211	20
48	234	132	147	73	245	63	86	224	26	116	99	185	5	207	166
137	149	47	230	64	90	68	243	121	101	223	22	208	170	180	3
74	256	51	84	37	233	134	159	186	16	195	164	213	25	118	111
238	45	151	129	251	66	92	56	30	221	103	113	11	178	172	200
82	59	248	76	157	142	225	39	162	203	8	188	109	126	17	215
244	67	96	58	239	38	153	133	4	179	176	202	31	214	105	117
150	143	229	41	83	52	250	80	102	127	21	217	163	196	10	192
60	88	75	242	135	145	46	237	204	168	187	2	119	97	222	29
33	231	141	158	72	252	50	91	209	23	125	110	184	12	194	171
136	156	34	235	49	87	77	254	120	108	210	27	193	167	189	14
71	241	62	93	44	232	139	146	183	1	206	173	220	24	123	98
227	36	154	144	246	79	85	57	19	212	106	128	6	191	165	201
95	54	249	69	148	131	240	42	175	198	9	181	100	115	32	218

Abb. 11.259: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 16$ (Hendricks, Beispiel 1)

Durch die Permutation innerhalb der beiden Gruppen lassen sich viele unterschiedliche bimagische Quadrate erzeugen. Außerdem spielt es keine Rolle, ob man die angegebene Gruppe oder die zugehörige

Gruppen mit den zu 15 komplementären Zahlen den Klein- bzw. Großbuchstaben zuordnet. Im Beispiel der Abbildung ist 11.260 sind die Zahlen in der vierten Zeile von oben aus Tabelle 11.40 den Großbuchstaben und die komplementären Zahlen den Kleinbuchstaben zugeordnet worden.

Belegung															
a	b	c	d	e	f	g	h	A	B	C	D	E	F	G	H
10	2	7	15	4	12	9	1	5	13	8	0	11	3	6	14

178	56	101	227	16	138	219	93	66	200	149	19	256	122	43	173
218	96	13	139	104	226	179	53	42	176	253	123	152	18	67	197
228	102	55	177	94	220	137	15	20	150	199	65	174	44	121	255
140	14	95	217	54	180	225	103	124	254	175	41	198	68	17	151
86	212	129	7	236	110	63	185	166	36	113	247	28	158	207	73
62	188	233	111	132	6	87	209	206	76	25	159	116	246	167	33
8	130	211	85	186	64	109	235	248	114	35	165	74	208	157	27
112	234	187	61	210	88	5	131	160	26	75	205	34	168	245	115
191	57	108	238	1	135	214	84	79	201	156	30	241	119	38	164
215	81	4	134	105	239	190	60	39	161	244	118	153	31	78	204
237	107	58	192	83	213	136	2	29	155	202	80	163	37	120	242
133	3	82	216	59	189	240	106	117	243	162	40	203	77	32	154
91	221	144	10	229	99	50	184	171	45	128	250	21	147	194	72
51	181	232	98	141	11	90	224	195	69	24	146	125	251	170	48
9	143	222	92	183	49	100	230	249	127	46	172	71	193	148	22
97	231	182	52	223	89	12	142	145	23	70	196	47	169	252	126

Abb. 11.260: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 16$ (Hendricks, Beispiel 2)

11.4.5 Kejun Chen – Wen Li

Das Verfahren von Kejun Chen und Wen Li zur Konstruktion bimagischer Quadrate der Ordnung 16 ist ein direkter Transfer aus Kapitel 11.1.9, wo ihre Konstruktion für bimagische Quadrate der Ordnung 8 beschrieben wird.[67] Für die Ordnung $m \cdot n = 2 \cdot 8 = 16$ wird ein magisches Rechteck der Größe 8×2 und ein idempotentes selbst-orthogonales lateinisches Quadrat der Ordnung $n = 8$ benötigt.

[67] Kejun Chen und Wen Li [86]

4	0	3	13	10	9	7	14
11	15	12	2	5	6	8	1

0	7	3	4	6	1	5	2
6	1	5	2	0	7	3	4
1	6	2	5	7	0	4	3
7	0	4	3	1	6	2	5
2	5	1	6	4	3	7	0
4	3	7	0	2	5	1	6
3	4	0	7	5	2	6	1
5	2	6	1	3	4	0	7

Abb. 11.261: Ausgangsdaten für das Verfahren von Kejun Chen und Wen Li

Mit diesen Ausgangsdaten werden dann die vier Hilfsquadrate der Ordnung 8 aus Abbildung 11.262 erzeugt.

4	14	13	10	7	0	9	3
7	0	9	3	4	14	13	10
0	7	3	9	14	4	10	13
14	4	10	13	0	7	3	9
3	9	0	7	10	13	14	4
10	13	14	4	3	9	0	7
13	10	4	14	9	3	7	0
9	3	7	0	13	10	4	14

A_0

11	1	2	5	8	15	6	12
8	15	6	12	11	1	2	5
15	8	12	6	1	11	5	2
1	11	5	2	15	8	12	6
12	6	15	8	5	2	1	11
5	2	1	11	12	6	15	8
2	5	11	1	6	12	8	15
6	12	8	15	2	5	11	1

A_1

15	1	11	8	2	6	12	5
8	11	1	15	5	12	6	2
12	5	2	6	11	8	15	1
6	2	5	12	1	15	8	11
1	15	8	11	6	2	5	12
11	8	15	1	12	5	2	6
5	12	6	2	8	11	1	15
2	6	12	5	15	1	11	8

B_0

0	14	4	7	13	9	3	10
7	4	14	0	10	3	9	13
3	10	13	9	4	7	0	14
9	13	10	3	14	0	7	4
14	0	7	4	9	13	10	3
4	7	0	14	3	10	13	9
10	3	9	13	7	4	14	0
13	9	3	10	0	14	4	7

B_1

Abb. 11.262: Hilfsquadrate A_0, A_1, B_0 und B_1

Wie im Fall der Ordnung 8 werden diese Hilfsquadrate danach zu Quadraten A und B zusammengesetzt, die in den Abbildungen 11.264 und 11.264 dargestellt sind.

A_0	A_0
A_1	A_1

4	14	13	10	7	0	9	3	4	14	13	10	7	0	9	3
7	0	9	3	4	14	13	10	7	0	9	3	4	14	13	10
0	7	3	9	14	4	10	13	0	7	3	9	14	4	10	13
14	4	10	13	0	7	3	9	14	4	10	13	0	7	3	9
3	9	0	7	10	13	14	4	3	9	0	7	10	13	14	4
10	13	14	4	3	9	0	7	10	13	14	4	3	9	0	7
13	10	4	14	9	3	7	0	13	10	4	14	9	3	7	0
9	3	7	0	13	10	4	14	9	3	7	0	13	10	4	14
11	1	2	5	8	15	6	12	11	1	2	5	8	15	6	12
8	15	6	12	11	1	2	5	8	15	6	12	11	1	2	5
15	8	12	6	1	11	5	2	15	8	12	6	1	11	5	2
1	11	5	2	15	8	12	6	1	11	5	2	15	8	12	6
12	6	15	8	5	2	1	11	12	6	15	8	5	2	1	11
5	2	1	11	12	6	15	8	5	2	1	11	12	6	15	8
2	5	11	1	6	12	8	15	2	5	11	1	6	12	8	15
6	12	8	15	2	5	11	1	6	12	8	15	2	5	11	1

Abb. 11.263: Aus $A0$ und $A1$ gebildetes Hilfsquadrat A

B_0	B_1
B_0	B_1

4	14	13	10	7	0	9	3	3	9	0	7	10	13	14	4
7	0	9	3	4	14	13	10	10	13	14	4	3	9	0	7
0	7	3	9	14	4	10	13	13	10	4	14	9	3	7	0
14	4	10	13	0	7	3	9	9	3	7	0	13	10	4	14
3	9	0	7	10	13	14	4	4	14	13	10	7	0	9	3
10	13	14	4	3	9	0	7	7	0	9	3	4	14	13	10
13	10	4	14	9	3	7	0	0	7	3	9	14	4	10	13
9	3	7	0	13	10	4	14	14	4	10	13	0	7	3	9
6	12	8	15	2	5	11	1	1	11	5	2	15	8	12	6
2	5	11	1	6	12	8	15	15	8	12	6	1	11	5	2
5	2	1	11	12	6	15	8	8	15	6	12	11	1	2	5
12	6	15	8	5	2	1	11	11	1	2	5	8	15	6	12
1	11	5	2	15	8	12	6	6	12	8	15	2	5	11	1
15	8	12	6	1	11	5	2	2	5	11	1	6	12	8	15
8	15	6	12	11	1	2	5	5	2	1	11	12	6	15	8
11	1	2	5	8	15	6	12	12	6	15	8	5	2	1	11

Abb. 11.264: Aus $B0$ und $B1$ gebildetes Hilfsquadrat B

Mit den Permutationen

$$\pi_1 = (8, 15)(9, 14)(10, 13)(11, 12)$$
$$\pi_2 = (1, 14)(3, 12)(5, 10)(7, 8)$$

entstehen dann die beiden orthogonalen Quadrate aus den Abbildungen 11.265 und 11.266.

4	14	13	10	7	0	9	3	3	9	0	7	10	13	14	4
7	0	9	3	4	14	13	10	10	13	14	4	3	9	0	7
0	7	3	9	14	4	10	13	13	10	4	14	9	3	7	0
14	4	10	13	0	7	3	9	9	3	7	0	13	10	4	14
3	9	0	7	10	13	14	4	4	14	13	10	7	0	9	3
10	13	14	4	3	9	0	7	7	0	9	3	4	14	13	10
13	10	4	14	9	3	7	0	0	7	3	9	14	4	10	13
9	3	7	0	13	10	4	14	14	4	10	13	0	7	3	9
6	12	8	15	2	5	11	1	1	11	5	2	15	8	12	6
2	5	11	1	6	12	8	15	15	8	12	6	1	11	5	2
5	2	1	11	12	6	15	8	8	15	6	12	11	1	2	5
12	6	15	8	5	2	1	11	11	1	2	5	8	15	6	12
1	11	5	2	15	8	12	6	6	12	8	15	2	5	11	1
15	8	12	6	1	11	5	2	2	5	11	1	6	12	8	15
8	15	6	12	11	1	2	5	5	2	1	11	12	6	15	8
11	1	2	5	8	15	6	12	12	6	15	8	5	2	1	11

Abb. 11.265: Erstes Quadrat eines orthogonalen Paares

4	14	13	10	7	0	9	3	3	9	0	7	10	13	14	4
7	0	9	3	4	14	13	10	10	13	14	4	3	9	0	7
0	7	3	9	14	4	10	13	13	10	4	14	9	3	7	0
14	4	10	13	0	7	3	9	9	3	7	0	13	10	4	14
3	9	0	7	10	13	14	4	4	14	13	10	7	0	9	3
10	13	14	4	3	9	0	7	7	0	9	3	4	14	13	10
13	10	4	14	9	3	7	0	0	7	3	9	14	4	10	13
9	3	7	0	13	10	4	14	14	4	10	13	0	7	3	9
6	12	8	15	2	5	11	1	1	11	5	2	15	8	12	6
2	5	11	1	6	12	8	15	15	8	12	6	1	11	5	2
5	2	1	11	12	6	15	8	8	15	6	12	11	1	2	5
12	6	15	8	5	2	1	11	11	1	2	5	8	15	6	12
1	11	5	2	15	8	12	6	6	12	8	15	2	5	11	1
15	8	12	6	1	11	5	2	2	5	11	1	6	12	8	15
8	15	6	12	11	1	2	5	5	2	1	11	12	6	15	8
11	1	2	5	8	15	6	12	12	6	15	8	5	2	1	11

Abb. 11.266: Zweites Quadrat eines orthogonalen Paares

Bei den beiden Quadraten in den Abbildungen 11.265 und 11.266 handelt es sich um ein Paar von orthogonalen Quadraten. Überlagert man diese beiden Quadrate, entsteht das symmetrische bimagische Quadrat mit trimagischen Diagonalen aus Abbildung 11.267.

Wie beim Verfahren der Ordnung $n = 8$ können auch hier sowohl das magische Rechteck als auch das idempotente selbst-orthogonale lateinische Ausgangsquadrat beliebig gewählt werden, um weitere bimagische Quadrate zu erzeugen.

80	239	220	168	115	10	157	59	54	148	7	126	169	213	226	65
121	5	146	49	70	228	215	174	163	218	237	75	64	159	12	120
13	123	51	154	236	72	176	223	210	161	73	229	151	62	118	4
231	78	166	212	2	113	57	149	156	56	128	15	221	171	67	234
50	145	9	117	167	222	230	68	77	235	211	170	124	8	160	63
172	216	240	79	61	155	3	122	119	14	150	52	66	225	217	165
214	164	71	238	153	53	114	1	16	127	60	152	227	74	173	219
147	58	125	11	224	175	76	232	233	69	162	209	6	116	55	158
99	202	141	251	48	95	188	24	25	181	82	33	246	132	199	110
38	84	183	30	105	197	130	241	256	143	204	104	19	186	93	43
92	40	32	191	205	107	243	138	135	254	102	196	178	17	41	85
194	97	249	133	87	46	22	180	189	27	35	90	140	248	112	207
23	190	86	36	242	129	201	101	108	200	144	255	45	91	179	26
253	139	195	106	28	184	96	47	34	81	185	21	103	206	134	244
137	245	98	193	182	20	39	94	83	42	29	187	208	111	252	136
192	31	44	88	131	250	109	203	198	100	247	142	89	37	18	177

Abb. 11.267: Symmetrisches bimagisches Quadrat der Ordnung 16 mit trimagischen Diagonalen (Chen - Li)

11.4.6 Lamb

Um pandiagonale bimagische Quadrate der Ordnung 16 zu erzeugen, geht Gil Lamb wie bei seinem Verfahren für die Ordnung 8 vor und wählt zunächst wieder ein magisches Rechteck.[68]

4	15	11	10	1	5	8	14
13	2	6	7	16	12	9	3

In die obere Zeile des linken oberen Quadranten eines Hilfsquadrates A werden die Zahlen aus der oberen Zeile des magischen Rechtecks eingetragen und darunter die Zahlen in umgekehrter Reihenfolge. Beide Zeilen werden dann in die beiden noch leeren Zeilen darunter übertragen, wobei die Zahlen in den einzelnen Zahlenpaaren vertauscht werden.

[68] Siehe Kapitel 11.1.12

4	15	11	10	1	5	8	14
14	8	5	1	10	11	15	4

4	15	11	10	1	5	8	14
14	8	5	1	10	11	15	4
15	4	10	11	5	1	14	8

4	15	11	10	1	5	8	14
14	8	5	1	10	11	15	4
15	4	10	11	5	1	14	8
8	14	1	5	11	10	4	15

Abb. 11.268: Hilfsquadrat A: Füllen des linken oberen Quadranten (Schritt 1)

Jetzt werden die vier bereits gefüllten Zeilen in die vier noch leeren Zeilen übertragen. Die beiden oberen Zeilen kommen ganz nach unten und die beiden anderen werden darüber platziert. Dabei werden aber die linken und rechten Hälften dieser Zeilen jeweils vertauscht.

4	15	11	10	1	5	8	14
14	8	5	1	10	11	15	4
15	4	10	11	5	1	14	8
8	14	1	5	11	10	4	15

4	15	11	10	1	5	8	14
14	8	5	1	10	11	15	4
15	4	10	11	5	1	14	8
8	14	1	5	11	10	4	15
5	1	14	8				
11	10	4	15				
1	5	8	14				
10	11	15	4				

4	15	11	10	1	5	8	14
14	8	5	1	10	11	15	4
15	4	10	11	5	1	14	8
8	14	1	5	11	10	4	15
5	1	14	8	15	4	10	11
11	10	4	15	8	14	1	5
1	5	8	14	4	15	11	10
10	11	15	4	14	8	5	1

Abb. 11.269: Hilfsquadrat A: Füllen des linken oberen Quadranten (Schritt 2)

Der vollständig gefüllte Quadrant wird dann in den rechten oberen Quadranten kopiert. Beide Quadranten werden abschließend in die untere Hälfte übertragen, wobei alle Zahlen z durch ihre zu $n + 1 = 17$ komplementäre Zahl $17 - z$ ersetzt wird. Das Ergebnis ist das Hilfsquadrat A in Abbildung 11.270.

4	15	11	10	1	5	8	14	4	15	11	10	1	5	8	14
14	8	5	1	10	11	15	4	14	8	5	1	10	11	15	4
15	4	10	11	5	1	14	8	15	4	10	11	5	1	14	8
8	14	1	5	11	10	4	15	8	14	1	5	11	10	4	15
5	1	14	8	15	4	10	11	5	1	14	8	15	4	10	11
11	10	4	15	8	14	1	5	11	10	4	15	8	14	1	5
1	5	8	14	4	15	11	10	1	5	8	14	4	15	11	10
10	11	15	4	14	8	5	1	10	11	15	4	14	8	5	1
13	2	6	7	16	12	9	3	13	2	6	7	16	12	9	3
3	9	12	16	7	6	2	13	3	9	12	16	7	6	2	13
2	13	7	6	12	16	3	9	2	13	7	6	12	16	3	9
9	3	16	12	6	7	13	2	9	3	16	12	6	7	13	2
12	16	3	9	2	13	7	6	12	16	3	9	2	13	7	6
6	7	13	2	9	3	16	12	6	7	13	2	9	3	16	12
16	12	9	3	13	2	6	7	16	12	9	3	13	2	6	7
7	6	2	13	3	9	12	16	7	6	2	13	3	9	12	16

Abb. 11.270: Hilfsquadrat A

Die ersten vier Spalten des linken oberen Quadranten des Hilfsquadrates B werden ähnlich wie bei der Ordnung 8 gefüllt. In die linke Spalte werden die Zahlen aus der unteren Rechteckzeile eingetragen, wobei die Zahlen von hinten nach vorne paarweise ausgelesen werden.

$$(\,13\;\;2\quad 6\;\;7\quad 16\;\;12\quad 9\;\;3\,) \longrightarrow (\,9\;\;3\quad 16\;\;12\quad 6\;\;7\quad 13\;\;2\,)$$

In die zweite Spalte werden die Zahlen aus der oberen Rechteckzeile eingetragen, wobei die Zahlen innerhalb der Zahlenpaare vertauscht werden.

$$(\,4\;\;15\quad 11\;\;10\quad 1\;\;5\quad 8\;\;14\,) \longrightarrow (\,15\;\;4\quad 10\;\;11\quad 5\;\;1\quad 14\;\;8\,)$$

In die dritten Spalte werden die Zahlen aus der oberen Rechteckzeile in umgekehrter Reihenfolge eingetragen, während die Zahlen aus der unteren Rechteckzeile in normaler Reihenfolge in die vierte Spalte eingetragen werden.

9							
3							
16							
12							
6							
7							
13							
2							

9	15						
3	4						
16	10						
12	11						
6	5						
7	1						
13	14						
2	8						

9	15	14	13				
3	4	8	2				
16	10	5	6				
12	11	1	7				
6	5	10	16				
7	1	11	12				
13	14	15	9				
2	8	4	3				

Abb. 11.271: Hilfsquadrat B: Füllen des linken oberen Quadranten (Schritt 1)

Jetzt werden die bereits vorhandenen Spalten horizontal symmetrisch gespiegelt. Dabei werden zusätzlich jeweils die Zahlen der oberen und unteren Hälfte in den betreffenden Hälften umgekehrt.

9	15	14	13				
3	4	8	2				
16	10	5	6				
12	11	1	7				
6	5	10	16				
7	1	11	12				
13	14	15	9				
2	8	4	3				

9	15	14	13	7	1	11	12
3	4	8	2	6	5	10	16
16	10	5	6	2	8	4	3
12	11	1	7	13	14	15	9
6	5	10	16				
7	1	11	12				
13	14	15	9				
2	8	4	3				

9	15	14	13	7	1	11	12
3	4	8	2	6	5	10	16
16	10	5	6	2	8	4	3
12	11	1	7	13	14	15	9
6	5	10	16	3	4	8	2
7	1	11	12	9	15	14	13
13	14	15	9	12	11	1	7
2	8	4	3	16	10	5	6

Abb. 11.272: Hilfsquadrat B: Füllen des linken oberen Quadranten (Schritt 2)

Der vollständig gefüllte Quadrant wird dann in den linken unteren Quadranten des Hilfsquadrates kopiert. Anschließend werden die Zahlen dieser beiden Quadranten in die rechte Hälfte übertragen, wobei wieder alle Zahlen z durch ihre Komplemente $17 - z$ ersetzt werden. Das vollständig gefüllte Hilfsquadrat B ist in Abbildung 11.273 dargestellt.

9	15	14	13	7	1	11	12	8	2	3	4	10	16	6	5
3	4	8	2	6	5	10	16	14	13	9	15	11	12	7	1
16	10	5	6	2	8	4	3	1	7	12	11	15	9	13	14
12	11	1	7	13	14	15	9	5	6	16	10	4	3	2	8
6	5	10	16	3	4	8	2	11	12	7	1	14	13	9	15
7	1	11	12	9	15	14	13	10	16	6	5	8	2	3	4
13	14	15	9	12	11	1	7	4	3	2	8	5	6	16	10
2	8	4	3	16	10	5	6	15	9	13	14	1	7	12	11
9	15	14	13	7	1	11	12	8	2	3	4	10	16	6	5
3	4	8	2	6	5	10	16	14	13	9	15	11	12	7	1
16	10	5	6	2	8	4	3	1	7	12	11	15	9	13	14
12	11	1	7	13	14	15	9	5	6	16	10	4	3	2	8
6	5	10	16	3	4	8	2	11	12	7	1	14	13	9	15
7	1	11	12	9	15	14	13	10	16	6	5	8	2	3	4
13	14	15	9	12	11	1	7	4	3	2	8	5	6	16	10
2	8	4	3	16	10	5	6	15	9	13	14	1	7	12	11

Abb. 11.273: Hilfsquadrat B

Wenn man die beiden Hilfsquadrate A und B überlagert und für jede Zelle die Rechnung

$$16 \cdot (A - 1) + B$$

durchführt, entsteht das pandiagonale bimagische Quadrat mit trimagischen Diagonalen aus Abbildung 11.274.

57	239	174	157	7	65	123	220	56	226	163	148	10	80	118	213
211	116	72	2	150	165	234	64	222	125	73	15	155	172	231	49
240	58	149	166	66	8	212	115	225	55	156	171	79	9	221	126
124	219	1	71	173	158	63	233	117	214	16	74	164	147	50	232
70	5	218	128	227	52	152	162	75	12	215	113	238	61	153	175
167	145	59	236	121	223	14	77	170	160	54	229	120	210	3	68
13	78	127	217	60	235	161	151	4	67	114	216	53	230	176	154
146	168	228	51	224	122	69	6	159	169	237	62	209	119	76	11
201	31	94	109	247	177	139	44	200	18	83	100	250	192	134	37
35	132	184	242	102	85	26	208	46	141	185	255	107	92	23	193
32	202	101	86	178	248	36	131	17	199	108	91	191	249	45	142
140	43	241	183	93	110	207	25	133	38	256	186	84	99	194	24
182	245	42	144	19	196	104	82	187	252	39	129	30	205	105	95
87	97	203	28	137	47	254	189	90	112	198	21	136	34	243	180
253	190	143	41	204	27	81	103	244	179	130	40	197	22	96	106
98	88	20	195	48	138	181	246	111	89	29	206	33	135	188	251

Abb. 11.274: Pandiagonales bimagisches Quadrat (Lamb)

Wie beim Verfahren der Ordnung 8 besitzen auch diese Quadrate gebrochene Diagonalen mit der bimagischen Summe. Daher können aus dem bimagischen Quadrat der Abbildung 11.274 weitere pandiagonale bimagische Quadrate durch Zeilen- und Spaltenverschiebungen erzeugt werden.

11.5 Ordnungen n = 20, 24, 28, ...

11.5.1 Kejun Chen - Wen Li

Mit dem Verfahren von Kejun Chen und Wen Li lassen sich symmetrische bimagische Quadrate der Ordnung $m \cdot n$ mit trimagischen Diagonalen konstruieren, wenn die Bedingungen $m, n \notin \{2, 3, 6\}$ und $m \equiv n \mod 2$ erfüllt sind.[69]

Da das Verfahren für die Ordnungen $n = 8$ und $n = 16$ bereits in den Kapiteln 11.4.5 und 11.1.9 ausführlich dargestellt wurde, soll für doppelt-gerade Ordnungen ab $n = 20$ nur ein weiteres Beispiel angegeben werden. Für die Ordnung $m \cdot n = 2 \cdot 10 = 20$ wird ein magisches Rechteck der Größe 10×2 und ein idempotentes selbst-orthogonales lateinisches Quadrat der Ordnung $n = 10$ benötigt.

[69] Kejun Chen und Wen Li [86]

8	7	3	13	15	5	18	17	9	0
11	12	16	6	4	14	1	2	10	19

0	7	6	9	3	2	4	8	5	1
9	1	0	6	8	7	5	3	4	2
4	8	2	7	1	3	9	5	6	0
6	5	8	3	0	9	2	1	7	4
8	9	5	1	4	6	7	0	2	3
1	3	4	0	7	5	8	2	9	6
7	4	3	8	2	1	6	9	0	5
5	2	9	4	6	0	1	7	3	8
2	0	1	5	9	4	3	6	8	7
3	6	7	2	5	8	0	4	1	9

Abb. 11.275: Ausgangsdaten für das Verfahren von Kejun Chen und Wen Li

Mit diesen Ausgangsdaten werden dann vier Hilfsquadrate A_0, A_1, B_0 und B_1 erzeugt.

8	17	18	0	13	3	15	9	5	7
0	7	8	18	9	17	5	13	15	3
15	9	3	17	7	13	0	5	18	8
18	5	9	13	8	0	3	7	17	15
9	0	5	7	15	18	17	8	3	13
7	13	15	8	17	5	9	3	0	18
17	15	13	9	3	7	18	0	8	5
5	3	0	15	18	8	7	17	13	9
3	8	7	5	0	15	13	18	9	17
13	18	17	3	5	9	8	15	7	0

a) A_0

11	2	1	19	6	16	4	10	14	12
19	12	11	1	10	2	14	6	4	16
4	10	16	2	12	6	19	14	1	11
1	14	10	6	11	19	16	12	2	4
10	19	14	12	4	1	2	11	16	6
12	6	4	11	2	14	10	16	19	1
2	4	6	10	16	12	1	19	11	14
14	16	19	4	1	11	12	2	6	10
16	11	12	14	19	4	6	1	10	2
6	1	2	16	14	10	11	4	12	19

b) A_1

12	10	14	2	19	11	1	4	6	16
1	11	19	4	10	16	14	6	12	2
2	12	6	19	4	14	16	10	11	1
10	2	1	16	11	12	19	14	4	6
16	19	11	12	14	1	6	2	10	4
6	1	16	10	2	4	11	12	14	19
14	4	10	6	1	19	2	11	16	12
19	16	4	11	12	6	10	1	2	14
4	14	2	1	6	10	12	16	19	11
11	6	12	14	16	2	4	19	1	10

c) B_0

7	9	5	17	0	8	18	15	13	3
18	8	0	15	9	3	5	13	7	17
17	7	13	0	15	5	3	9	8	18
9	17	18	3	8	7	0	5	15	13
3	0	8	7	5	18	13	17	9	15
13	18	3	9	17	15	8	7	5	0
5	15	9	13	18	0	17	8	3	7
0	3	15	8	7	13	9	18	17	5
15	5	17	18	13	9	7	3	0	8
8	13	7	5	3	17	15	0	18	9

d) B_1

8	17	18	0	13	3	15	9	5	7	7	5	9	15	3	13	0	18	17	8
0	7	8	18	9	17	5	13	15	3	3	15	13	5	17	9	18	8	7	0
15	9	3	17	7	13	0	5	18	8	8	18	5	0	13	7	17	3	9	15
18	5	9	13	8	0	3	7	17	15	15	17	7	3	0	8	13	9	5	18
9	0	5	7	15	18	17	8	3	13	13	3	8	17	18	15	7	5	0	9
7	13	15	8	17	5	9	3	0	18	18	0	3	9	5	17	8	15	13	7
17	15	13	9	3	7	18	0	8	5	5	8	0	18	7	3	9	13	15	17
5	3	0	15	18	8	7	17	13	9	9	13	17	7	8	18	15	0	3	5
3	8	7	5	0	15	13	18	9	17	17	9	18	13	15	0	5	7	8	3
13	18	17	3	5	9	8	15	7	0	0	7	15	8	9	5	3	17	18	13
6	1	2	16	14	10	11	4	12	19	19	12	4	11	10	14	16	2	1	6
16	11	12	14	19	4	6	1	10	2	2	10	1	6	4	19	14	12	11	16
14	16	19	4	1	11	12	2	6	10	10	6	2	12	11	1	4	19	16	14
2	4	6	10	16	12	1	19	11	14	14	11	19	1	12	16	10	6	4	2
12	6	4	11	2	14	10	16	19	1	1	19	16	10	14	2	11	4	6	12
10	19	14	12	4	1	2	11	16	6	6	16	11	2	1	4	12	14	19	10
1	14	10	6	11	19	16	12	2	4	4	2	12	16	19	11	6	10	14	1
4	10	16	2	12	6	19	14	1	11	11	1	14	19	6	12	2	16	10	4
19	12	11	1	10	2	14	6	4	16	16	4	6	14	2	10	1	11	12	19
11	2	1	19	6	16	4	10	14	12	12	14	10	4	16	6	19	1	2	11

12	9	14	17	19	8	1	15	6	3	16	13	4	18	11	0	2	5	10	7
1	8	19	15	10	3	14	13	12	17	2	7	6	5	16	9	4	0	11	18
2	7	6	0	4	5	16	9	11	18	1	8	10	3	14	15	19	13	12	17
10	17	1	3	11	7	19	5	4	13	6	15	14	0	12	8	16	18	2	9
16	0	11	7	14	18	6	17	10	15	4	9	2	13	1	5	12	8	19	3
6	18	16	9	2	15	11	7	14	0	19	5	12	8	4	17	10	3	1	13
14	15	10	13	1	0	2	8	16	7	12	3	11	17	19	18	6	9	4	5
19	3	4	8	12	13	10	18	2	5	14	17	1	9	6	7	11	15	16	0
4	5	2	18	6	9	12	3	19	8	11	0	16	7	10	13	1	17	14	15
11	13	12	5	16	17	4	0	1	9	10	18	19	15	2	3	14	7	6	8
11	13	12	5	16	17	4	0	1	9	10	18	19	15	2	3	14	7	6	8
4	5	2	18	6	9	12	3	19	8	11	0	16	7	10	13	1	17	14	15
19	3	4	8	12	13	10	18	2	5	14	17	1	9	6	7	11	15	16	0
14	15	10	13	1	0	2	8	16	7	12	3	11	17	19	18	6	9	4	5
6	18	16	9	2	15	11	7	14	0	19	5	12	8	4	17	10	3	1	13
16	0	11	7	14	18	6	17	10	15	4	9	2	13	1	5	12	8	19	3
10	17	1	3	11	7	19	5	4	13	6	15	14	0	12	8	16	18	2	9
2	7	6	0	4	5	16	9	11	18	1	8	10	3	14	15	19	13	12	17
1	8	19	15	10	3	14	13	12	17	2	7	6	5	16	9	4	0	11	18
12	9	14	17	19	8	1	15	6	3	16	13	4	18	11	0	2	5	10	7

Abb. 11.276: Hilfsquadrate des orthogonales Paares

Wie im Fall der Ordnungen 8 und 16 werden diese Hilfsquadrate danach zu Quadraten A und B zusammengesetzt. Mit den Permutationen

$$\pi_1 = (10, 19)(11, 18)(12, 17)(13, 16)(14, 15)$$
$$\pi_2 = (1, 18)(3, 16)(5, 14)(7, 12)(9, 10)$$

entstehen dann die beiden orthogonalen Hilfsquadrate in der Abbildungen 11.276. Überlagert man diese beiden Quadrate, entsteht das symmetrische bimagische Quadrat mit trimagischen Diagonalen aus Abbildung 11.277.

Wie beim Verfahren der Ordnung $n = 8$ können auch hier sowohl das magische Rechteck als auch das idempotente selbst-orthogonale lateinische Ausgangsquadrat beliebig gewählt werden, um weitere bimagische Quadrate zu erzeugen.

173	350	375	18	280	69	302	196	107	144	157	114	185	319	72	261	3	366	351	168
2	149	180	376	191	344	115	274	313	78	63	308	267	106	357	190	365	161	152	19
303	188	67	341	145	266	17	110	372	179	162	369	111	4	275	156	360	74	193	318
371	118	182	264	172	8	80	146	345	314	307	356	155	61	13	169	277	199	103	370
197	1	112	148	315	379	347	178	71	276	265	70	163	354	362	306	153	109	20	184
147	279	317	170	343	116	192	68	15	361	380	6	73	189	105	358	171	304	262	154
355	316	271	194	62	141	363	9	177	108	113	164	12	378	160	79	187	270	305	346
120	64	5	309	373	174	151	359	263	186	195	278	342	150	167	368	312	16	77	101
65	166	143	119	7	310	273	364	200	349	352	181	377	268	311	14	102	158	175	76
272	374	353	66	117	198	165	301	142	10	11	159	320	176	183	104	75	348	367	269
132	34	53	326	297	218	225	81	242	390	391	259	100	236	203	284	335	48	27	129
325	226	243	299	387	90	133	24	220	49	52	201	37	128	91	394	282	258	235	336
300	324	385	89	33	234	251	59	123	206	215	138	42	250	227	28	92	396	337	281
55	96	131	214	322	241	23	389	237	288	293	224	392	38	260	339	207	130	85	46
247	139	97	230	43	296	212	328	395	21	40	386	333	209	285	58	231	84	122	254
217	381	292	248	95	39	47	238	331	136	125	330	223	54	22	86	253	289	400	204
31	298	202	124	232	388	340	246	45	94	87	56	255	321	393	229	137	219	283	30
83	208	327	41	245	126	397	290	32	239	222	29	291	384	135	256	60	334	213	98
382	249	240	36	211	44	295	134	93	338	323	88	127	286	57	210	25	221	252	399
233	50	35	398	140	329	82	216	287	244	257	294	205	99	332	121	383	26	51	228

Abb. 11.277: Symmetrisches bimagisches Quadrat der Ordnung 20 mit trimagischen Diagonalen (Chen - Li)

11.6 Ordnung n = 25

11.6.1 Tarry – Cazalas

In Kapitel 11.2.4 wurde eine Methode von Tarry und Cazalas vorgestellt, mit der man bimagische Quadrate der Ordnung $n = m^2$ erzeugen kann. Für die Ordnung $n = 25$ müssen nur die Parameter angepasst werden.

Die Serien $(r_1, r_2)_m$ und $(s_1, s_2)_m$ müssen bei der Ordnung 25 zur Basis $m = 5$ gebildet werden. Für das hier dargestellte Beispiel wurden die Serien $(r_1, r_2)_5 = (4220, 4311)_5$ und $(s_1, s_2)_5 = (3014, 0343)_5$ gewählt. Nach Tabelle 11.28 enthält die Serie $(4220, 4311)_5$ die Zahlen aus Tabelle 11.41, die von links nach rechts und von oben nach unten in die Kopfzeile der Additionstabelle eingetragen werden.

0000	4220	3440	2110	1330
4311	3031	2201	1421	0141
3122	2342	1012	0232	4402
2433	1103	0323	4043	3213
1244	0414	4134	3304	2024

Tab. 11.41: Zahlen der arithmetischen Serie $(4220, 4311)_5$

Entsprechend ergeben sich die Zahlen aus Tabelle 11.42 für die zweite Serie $(s_1, s_2)_5 = (3014, 0343)_5$. Diese Zahlen werden in die linke Spalte der Additionstabelle eingetragen.

0000	3014	1023	4032	2041
0343	3302	1311	4320	2334
0131	3140	1104	4113	2122
0424	3433	1442	4401	2410
0212	3221	1230	4244	2203

Tab. 11.42: Zahlen der arithmetischen Serie $(3014, 0343)_5$

Aus den Zahlen der oberen Zeile und der linken Spalte lassen sich dann alle Einträge der Additionstabelle berechnen. In Abbildung 11.43 ist die linke obere Ecke dieser Additionstabelle dargestellt.

	0	r_1	$2\,r_1$	$3\,r_1$	$4\,r_1$	r_2	$r_2 + r1$	$\cdots$
0	0000	4220	3440	2110	1330	4311	3031	$\cdots$
s_1	3014	2234	1404	0124	4344	2320	1040	$\cdots$
$2\,s_1$	1023	0243	4413	3133	2303	0334	4004	$\cdots$
$3\,s_1$	4032	3202	2422	1142	0312	3343	2013	$\cdots$
$4\,s_1$	2041	1211	0431	4101	3321	1302	0022	$\cdots$
s_2	0343	4013	3233	2403	1123	4104	3324	$\cdots$
$s2 + s1$	3302	2022	1242	0412	4132	2113	1333	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Tab. 11.43: Tabelle mit den arithmetischen Serien $(4220, 4311)_5$ und $(3014, 0343)_5$

Rechnet man danach alle Zahlen aus der Additionstabelle in das Zehnersystem um und erhöht alle Zahlen um 1, ergibt sich das bimagische Quadrat aus Abbildung 11.278.

1	561	496	281	216	582	392	302	237	47	413	348	133	68	603	369	154	89	524	434	200	110	545	455	265
385	320	230	40	600	336	146	56	616	401	167	77	512	447	357	123	533	468	253	188	554	489	299	209	19
139	74	609	419	329	95	505	440	375	160	546	456	266	176	111	477	287	222	7	567	308	243	28	588	398
518	428	363	173	83	474	259	194	104	539	280	215	25	560	495	231	41	576	386	321	62	622	407	342	127
272	182	117	527	462	203	13	573	483	293	34	594	379	314	249	615	425	335	145	55	441	351	161	96	506
99	509	444	354	164	530	465	275	185	120	481	291	201	11	571	312	247	32	592	377	143	53	613	423	333
453	263	198	108	543	284	219	4	564	499	240	50	585	395	305	66	601	411	346	131	522	432	367	152	87
207	17	552	487	297	38	598	383	318	228	619	404	339	149	59	450	360	170	80	515	251	186	121	531	466
586	396	306	241	26	417	327	137	72	607	373	158	93	503	438	179	114	549	459	269	10	570	480	290	225
345	130	65	625	410	171	81	516	426	361	102	537	472	257	192	558	493	278	213	23	389	324	234	44	579
42	577	387	322	232	623	408	343	128	63	429	364	174	84	519	260	195	105	540	475	211	21	556	491	276
421	331	141	51	611	352	162	97	507	442	183	118	528	463	273	14	574	484	294	204	595	380	315	250	35
155	90	525	435	370	106	541	451	261	196	562	497	282	217	2	393	303	238	48	583	349	134	69	604	414
534	469	254	189	124	490	300	210	20	555	316	226	36	596	381	147	57	617	402	337	78	513	448	358	168
288	223	8	568	478	244	29	589	399	309	75	610	420	330	140	501	436	371	156	91	457	267	177	112	547
115	550	460	270	180	566	476	286	221	6	397	307	242	27	587	328	138	73	608	418	159	94	504	439	374
494	279	214	24	559	325	235	45	580	390	126	61	621	406	341	82	517	427	362	172	538	473	258	193	103
248	33	593	378	313	54	614	424	334	144	510	445	355	165	100	461	271	181	116	526	292	202	12	572	482
602	412	347	132	67	433	368	153	88	523	264	199	109	544	454	220	5	565	500	285	46	581	391	301	236
356	166	76	511	446	187	122	532	467	252	18	553	488	298	208	599	384	319	229	39	405	340	150	60	620
58	618	403	338	148	514	449	359	169	79	470	255	190	125	535	296	206	16	551	486	227	37	597	382	317
437	372	157	92	502	268	178	113	548	458	224	9	569	479	289	30	590	400	310	245	606	416	326	136	71
191	101	536	471	256	22	557	492	277	212	578	388	323	233	43	409	344	129	64	624	365	175	85	520	430
575	485	295	205	15	376	311	246	31	591	332	142	52	612	422	163	98	508	443	353	119	529	464	274	184
304	239	49	584	394	135	70	605	415	350	86	521	431	366	151	542	452	262	197	107	498	283	218	3	563

Abb. 11.278: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 25$ (Tarry - Cazalas)

Pandiagonale bimagische Quadrate

Tarry und Cazalas haben festgestellt, dass diese Quadrate sogar pandiagonal werden, wenn eine zusätzliche hinreichende Bedingung erfüllt ist. Hierzu müssen die beiden Serien $(r_2 \pm s_2)_5$ frei von Wiederholungen an den einzelnen Ziffernpositionen sein.

Betrachtet man beispielsweise die Serien $(r_1, r_2)_5 = (1330, 4103)_5$ und $(s_1, s_2)_5 = (0233, 3314)_5$, so erhält man

$$\begin{array}{lclcl} (r_2 + s_2)_5 & = & (2412)_5 & = & 0000\ \ 2412\ \ 4324\ \ 1231\ \ 3143 \\ (r_2 - s_2)_5 & = & (1344)_5 & = & 0000\ \ 1344\ \ 2133\ \ 3422\ \ 4211 \end{array}$$

Schreibt man die Zahlen der beiden Serien jeweils positionsgerecht untereinander, so erkennt man, dass an jeder Position die Ziffern 0, 1, 2, 3 und 4 auftreten. Keine der Ziffern kommt an irgendeiner Position doppelt vor.

Mit dieser Bedingung erzeugen die beiden Serien $(r_1, r_2)_5 = (1330, 4103)_5$ und $(s_1, s_2)_5 = (0233, 3314)_5$ das pandiagonale bimagische Quadrat aus Abbildung 11.279.

1	216	281	496	561	529	119	184	274	464	427	517	82	172	362	330	420	610	75	140	228	318	383	598	38
69	134	349	414	604	592	32	247	312	377	495	560	25	215	280	268	458	548	113	178	166	356	446	511	76
107	197	262	452	542	510	100	165	355	445	408	623	63	128	343	306	396	586	26	241	209	299	489	554	19
50	240	305	395	585	573	13	203	293	483	471	536	101	191	256	374	439	504	94	159	147	337	402	617	57
88	153	368	433	523	611	51	141	331	421	389	579	44	234	324	287	477	567	7	222	190	255	470	535	125
460	550	115	180	270	358	448	513	78	168	131	346	411	601	66	34	249	314	379	594	557	22	212	277	492
398	588	28	243	308	296	486	551	16	206	199	264	454	544	109	97	162	352	442	507	625	65	130	345	410
436	501	91	156	371	339	404	619	59	149	237	302	392	582	47	15	205	295	485	575	538	103	193	258	473
479	569	9	224	289	252	467	532	122	187	155	370	435	525	90	53	143	333	423	613	576	41	231	321	386
417	607	72	137	327	320	385	600	40	230	218	283	498	563	3	116	181	271	461	526	519	84	174	364	429
164	354	444	509	99	62	127	342	407	622	590	30	245	310	400	488	553	18	208	298	261	451	541	106	196
202	292	482	572	12	105	195	260	475	540	503	93	158	373	438	401	616	56	146	336	304	394	584	49	239
145	335	425	615	55	43	233	323	388	578	566	6	221	286	476	469	534	124	189	254	367	432	522	87	152
183	273	463	528	118	81	171	361	426	516	609	74	139	329	419	382	597	37	227	317	285	500	565	5	220
246	311	376	591	31	24	214	279	494	559	547	112	177	267	457	450	515	80	170	360	348	413	603	68	133
618	58	148	338	403	391	581	46	236	301	294	484	574	14	204	192	257	472	537	102	95	160	375	440	505
531	121	186	251	466	434	524	89	154	369	332	422	612	52	142	235	325	390	580	45	8	223	288	478	568
599	39	229	319	384	497	562	2	217	282	275	465	530	120	185	173	363	428	518	83	71	136	326	416	606
512	77	167	357	447	415	605	70	135	350	313	378	593	33	248	211	276	491	556	21	114	179	269	459	549
555	20	210	300	490	453	543	108	198	263	351	441	506	96	161	129	344	409	624	64	27	242	307	397	587
322	387	577	42	232	225	290	480	570	10	123	188	253	468	533	521	86	151	366	431	424	614	54	144	334
365	430	520	85	175	138	328	418	608	73	36	226	316	381	596	564	4	219	284	499	462	527	117	182	272
278	493	558	23	213	176	266	456	546	111	79	169	359	449	514	602	67	132	347	412	380	595	35	250	315
341	406	621	61	126	244	309	399	589	29	17	207	297	487	552	545	110	200	265	455	443	508	98	163	353
259	474	539	104	194	157	372	437	502	92	60	150	340	405	620	583	48	238	303	393	481	571	11	201	291

Abb. 11.279: Pandiagonales bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 25$ (Tarry - Cazalas)

Für die Ordnung $n = 9$ kann diese hinreichende Bedingung allerdings nicht erfüllt werden, so dass sich mit dem Verfahren von Tarry und Cazalas keine pandiagonalen bimagischen Quadrate dieser Ordnung erzeugen lassen.

11.6.2 Hendricks

Das Verfahren von Hendricks aus Kapitel 11.2.5 kann unverändert auf die Ordnung $n = 25$ übertragen werden. Man wählt also wieder eine Koeffizientenmatrix C, bei der die Summe der Koeffizienten in allen Zeilen und allen Spalten jeweils gleich 4 ist.

$$C = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Abb. 11.280: Koeffizientenmatrix

Mit dieser Koeffizientenmatrix ergeben sich folgende Gleichungen für die Berechnung der Zahlen d_3, d_2, d_1 und d_0, die modulo $m = 5$ durchgeführt werden muss.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} d_3 & = & & & s_1 & + & z_2 & & 2\,z_1 \\ d_2 & = & 2\,s_2 & + & & & z_2 & + & z_1 \\ d_1 & = & s_2 & + & s_1 & + & 2\,z_2 & & \\ d_0 & = & s_2 & & 2\,s_1 & + & & + & z_1 \end{array}$$

Im Beispiel der Ordnung $n = 25$ ergibt sich die folgende Gleichung, mit der aus der Position (s, z) einer Zelle die dort einzutragende Zahl d bestimmt werden kann.

$$d = 125 \cdot d_3 + 25 \cdot d_2 + 5 \cdot d_1 + 1 \cdot d_0 + 1$$

Im ersten Beispiel wird die Zahl berechnet, die in die Zelle mit der Position $(s, z) = (3, 17)$ eingetragen wird. Alle Koordinaten werden im Zahlensystem zur Basis 5 ausgedrückt, so dass diese Position demnach $(03, 32)$ lautet. Damit ergeben sich folgende Berechnungen:

$$\begin{aligned} d_3 &= 0 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 0 + 3 + 3 + 4 = 10 \equiv 0 \\ d_2 &= 2 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 0 + 0 + 3 + 2 = 5 \equiv 0 \\ d_1 &= 1 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 2 = 0 + 3 + 6 + 0 = 9 \equiv 4 \\ d_0 &= 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 0 + 6 + 0 + 2 = 8 \equiv 3 \end{aligned}$$

Mit diesen Faktoren kann die einzutragende Zahl x berechnet werden.

$$d = 125 \cdot 0 + 25 \cdot 0 + 5 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 1 = 24$$

Führt man diese Rechnung für alle Koordinaten durch, erhält man das erste semi-bimagische Hilfsquadrat aus Abbildung 11.281.

1	133	265	392	524	57	189	316	448	555	113	245	372	479	606	44	171	278	410	537	100	202	334	461	593
277	409	536	43	175	333	465	592	99	201	264	391	523	5	132	320	447	554	56	188	371	478	610	112	244
553	60	187	319	446	609	111	243	375	477	540	42	174	276	408	591	98	205	332	464	522	4	131	263	395
204	331	463	595	97	135	262	394	521	3	186	318	450	552	59	242	374	476	608	115	173	280	407	539	41
480	607	114	241	373	406	538	45	172	279	462	594	96	203	335	393	525	2	134	261	449	551	58	190	317
161	293	425	527	34	217	349	451	583	90	148	255	382	514	16	179	306	438	570	72	235	362	494	621	103
437	569	71	178	310	493	625	102	234	361	424	526	33	165	292	455	582	89	216	348	381	513	20	147	254
88	220	347	454	581	19	146	253	385	512	75	177	309	436	568	101	233	365	492	624	32	164	291	423	530
364	491	623	105	232	295	422	529	31	163	346	453	585	87	219	252	384	511	18	150	308	440	567	74	176
515	17	149	251	383	566	73	180	307	439	622	104	231	363	495	528	35	162	294	421	584	86	218	350	452
321	428	560	62	194	352	484	611	118	250	283	415	542	49	151	339	466	598	80	207	270	397	504	6	138
597	79	206	338	470	503	10	137	269	396	559	61	193	325	427	615	117	249	351	483	541	48	155	282	414
248	355	482	614	116	154	281	413	545	47	210	337	469	596	78	136	268	400	502	9	192	324	426	558	65
399	501	8	140	267	430	557	64	191	323	481	613	120	247	354	412	544	46	153	285	468	600	77	209	336
50	152	284	411	543	76	208	340	467	599	7	139	266	398	505	63	195	322	429	556	119	246	353	485	612
456	588	95	222	329	387	519	21	128	260	443	575	52	184	311	499	601	108	240	367	405	532	39	166	298
107	239	366	498	605	38	170	297	404	531	94	221	328	460	587	25	127	259	386	518	51	183	315	442	574
258	390	517	24	126	314	441	573	55	182	370	497	604	106	238	296	403	535	37	169	327	459	586	93	225
534	36	168	300	402	590	92	224	326	458	516	23	130	257	389	572	54	181	313	445	603	110	237	369	496
185	312	444	571	53	236	368	500	602	109	167	299	401	533	40	223	330	457	589	91	129	256	388	520	22
616	123	230	357	489	547	29	156	288	420	578	85	212	344	471	509	11	143	275	377	565	67	199	301	433
142	274	376	508	15	198	305	432	564	66	229	356	488	620	122	160	287	419	546	28	211	343	475	577	84
418	550	27	159	286	474	576	83	215	342	380	507	14	141	273	431	563	70	197	304	487	619	121	228	360
69	196	303	435	562	125	227	359	486	618	26	158	290	417	549	82	214	341	473	580	13	145	272	379	506
345	472	579	81	213	271	378	510	12	144	302	434	561	68	200	358	490	617	124	226	289	416	548	30	157

Abb. 11.281: Semi-bimagisches Hilfsquadrat 1

Danach wird ein zweites semi-bimagisches Hilfsquadrat konstruiert, indem man die beiden Gleichungen zur Berechnung der Faktoren d_3 und d_2 ebenso vertauscht wie die Gleichungen für d_1 und d_0.

$$\begin{array}{rcccccccc}
d_3 & = & 2\,s_2 & + & & & z_2 & + & z_1 \\
d_2 & = & & & s_1 & + & z_2 & & 2\,z_1 \\
d_1 & = & s_2 & & 2\,s_1 & + & & + & z_1 \\
d_0 & = & s_2 & + & s_1 & + & 2\,z_2 & &
\end{array}$$

Mit diesen neuen Gleichungen werden wieder die Zahlen berechnet, die in das zweite semi-bimagische Hilfsquadrat einzutragen sind. (siehe Abbildung 11.282)

1	37	73	84	120	257	293	304	340	371	513	549	560	591	602	144	155	186	222	233	400	406	442	453	489
181	217	228	139	175	437	473	484	395	401	68	79	115	21	32	324	335	366	252	288	555	586	622	508	544
361	272	283	319	330	617	503	539	575	581	248	134	170	176	212	479	390	421	432	468	110	16	27	63	99
416	427	463	499	385	47	58	94	105	11	278	314	350	356	267	534	570	576	612	523	165	196	207	243	129
596	607	518	529	565	202	238	149	160	191	458	494	380	411	447	89	125	6	42	53	345	351	262	298	309
153	189	225	231	142	409	445	451	487	398	40	71	82	118	4	291	302	338	374	260	547	558	594	605	511
333	369	255	286	322	589	625	506	542	553	220	226	137	173	184	471	482	393	404	440	77	113	24	35	66
388	424	435	466	477	19	30	61	97	108	275	281	317	328	364	501	537	573	584	620	132	168	179	215	246
568	579	615	521	532	199	210	241	127	163	430	461	497	383	419	56	92	103	14	50	312	348	359	270	276
123	9	45	51	87	354	265	296	307	343	610	516	527	563	599	236	147	158	194	205	492	378	414	450	456
305	336	372	258	294	556	592	603	514	550	187	223	234	145	151	443	454	490	396	407	74	85	116	2	38
485	391	402	438	474	111	22	33	69	80	367	253	289	325	331	623	509	545	551	587	229	140	171	182	218
540	571	582	618	504	166	177	213	249	135	422	433	469	480	386	28	64	100	106	17	284	320	326	362	273
95	101	12	48	59	346	357	268	279	315	577	613	524	535	566	208	244	130	161	197	464	500	381	417	428
150	156	192	203	239	376	412	448	459	495	7	43	54	90	121	263	299	310	341	352	519	530	561	597	608
452	488	399	410	441	83	119	5	36	72	339	375	256	292	303	595	601	512	548	559	221	232	143	154	190
507	543	554	590	621	138	174	185	216	227	394	405	436	472	483	25	31	67	78	114	251	287	323	334	370
62	98	109	20	26	318	329	365	271	282	574	585	616	502	538	180	211	247	133	169	431	467	478	389	425
242	128	164	200	206	498	384	420	426	462	104	15	46	57	93	360	266	277	313	349	611	522	533	569	580
297	308	344	355	261	528	564	600	606	517	159	195	201	237	148	415	446	457	493	379	41	52	88	124	10
604	515	546	557	593	235	141	152	188	224	486	397	408	444	455	117	3	39	75	81	373	259	295	301	337
34	70	76	112	23	290	321	332	368	254	541	552	588	624	510	172	183	219	230	136	403	439	475	481	392
214	250	131	167	178	470	476	387	423	434	96	107	18	29	65	327	363	274	285	316	583	619	505	536	572
269	280	311	347	358	525	531	567	578	614	126	162	198	209	245	382	418	429	465	496	13	49	60	91	102
449	460	491	377	413	55	86	122	8	44	306	342	353	264	300	562	598	609	520	526	193	204	240	146	157

Abb. 11.282: Semi-bimagisches Hilfsquadrat 2

Nun markiert man im ersten Hilfsquadrat alle Zahlen, die sich in einer beliebigen Zeile des zweiten Hilfsquadrates befinden. Wählt man beispielsweise die untere Zeile, erkennt man in Abbildung 11.283, dass sich in jeder Zeile und in jeder Spalte des ersten Hilfsquadrates genau eine dieser Zahlen befindet.

Da die markierten 25 Zahlen addiert die bimagische Summe ergeben, werden sie jetzt durch das Vertauschen von Zeilen auf die Nebendiagonale transformiert. Da sich durch diese Transformationen die Zeilen- und Spaltensummen nicht ändern, ist das transformierte Quadrat aus Abbildung 11.284 bimagisch.

1	133	265	392	524	57	189	316	448	555	113	245	372	479	606	44	171	278	410	537	100	202	334	461	593
277	409	536	43	175	333	465	592	99	201	264	391	523	5	132	320	447	554	56	188	371	478	610	112	244
553	60	187	319	446	609	111	243	375	477	540	42	174	276	408	591	98	205	332	464	522	4	131	263	395
204	331	463	595	97	135	262	394	521	3	186	318	450	552	59	242	374	476	608	115	173	280	407	539	41
480	607	114	241	373	406	538	45	172	279	462	594	96	203	335	393	525	2	134	261	449	551	58	190	317
161	293	425	527	34	217	349	451	583	90	148	255	382	514	16	179	306	438	570	72	235	362	494	621	103
437	569	71	178	310	493	625	102	234	361	424	526	33	165	292	455	582	89	216	348	381	513	20	147	254
88	220	347	454	581	19	146	253	385	512	75	177	309	436	568	101	233	365	492	624	32	164	291	423	530
364	491	623	105	232	295	422	529	31	163	346	453	585	87	219	252	384	511	18	150	308	440	567	74	176
515	17	149	251	383	566	73	180	307	439	622	104	231	363	495	528	35	162	294	421	584	86	218	350	452
321	428	560	62	194	352	484	611	118	250	283	415	542	49	151	339	466	598	80	207	270	397	504	6	138
597	79	206	338	470	503	10	137	269	396	559	61	193	325	427	615	117	249	351	483	541	48	155	282	414
248	355	482	614	116	154	281	413	545	47	210	337	469	596	78	136	268	400	502	9	192	324	426	558	65
399	501	8	140	267	430	557	64	191	323	481	613	120	247	354	412	544	46	153	285	468	600	77	209	336
50	152	284	411	543	76	208	340	467	599	7	139	266	398	505	63	195	322	429	556	119	246	353	485	612
456	588	95	222	329	387	519	21	128	260	443	575	52	184	311	499	601	108	240	367	405	532	39	166	298
107	239	366	498	605	38	170	297	404	531	94	221	328	460	587	25	127	259	386	518	51	183	315	442	574
258	390	517	24	126	314	441	573	55	182	370	497	604	106	238	296	403	535	37	169	327	459	586	93	225
534	36	168	300	402	590	92	224	326	458	516	23	130	257	389	572	54	181	313	445	603	110	237	369	496
185	312	444	571	53	236	368	500	602	109	167	299	401	533	40	223	330	457	589	91	129	256	388	520	22
616	123	230	357	489	547	29	156	288	420	578	85	212	344	471	509	11	143	275	377	565	67	199	301	433
142	274	376	508	15	198	305	432	564	66	229	356	488	620	122	160	287	419	546	28	211	343	475	577	84
418	550	27	159	286	474	576	83	215	342	380	507	14	141	273	431	563	70	197	304	487	619	121	228	360
69	196	303	435	562	125	227	359	486	618	26	158	290	417	549	82	214	341	473	580	13	145	272	379	506
345	472	579	81	213	271	378	510	12	144	302	434	561	68	200	358	490	617	124	226	289	416	548	30	157

Abb. 11.283: Semi-bimagisches Hilfsquadrat 1 mit den markierten Zahlen

204	331	463	595	97	135	262	394	521	3	186	318	450	552	59	242	374	476	608	115	173	280	407	539	41
364	491	623	105	232	295	422	529	31	163	346	453	585	87	219	252	384	511	18	150	308	440	567	74	176
399	501	8	140	267	430	557	64	191	323	481	613	120	247	354	412	544	46	153	285	468	600	77	209	336
534	36	168	300	402	590	92	224	326	458	516	23	130	257	389	572	54	181	313	445	603	110	237	369	496
69	196	303	435	562	125	227	359	486	618	26	158	290	417	549	82	214	341	473	580	13	145	272	379	506
553	60	187	319	446	609	111	243	375	477	540	42	174	276	408	591	98	205	332	464	522	4	131	263	395
88	220	347	454	581	19	146	253	385	512	75	177	309	436	568	101	233	365	492	624	32	164	291	423	530
248	355	482	614	116	154	281	413	545	47	210	337	469	596	78	136	268	400	502	9	192	324	426	558	65
258	390	517	24	126	314	441	573	55	182	370	497	604	106	238	296	403	535	37	169	327	459	586	93	225
418	550	27	159	286	474	576	83	215	342	380	507	14	141	273	431	563	70	197	304	487	619	121	228	360
277	409	536	43	175	333	465	592	99	201	264	391	523	5	132	320	447	554	56	188	371	478	610	112	244
437	569	71	178	310	493	625	102	234	361	424	526	33	165	292	455	582	89	216	348	381	513	20	147	254
597	79	206	338	470	503	10	137	269	396	559	61	193	325	427	615	117	249	351	483	541	48	155	282	414
107	239	366	498	605	38	170	297	404	531	94	221	328	460	587	25	127	259	386	518	51	183	315	442	574
142	274	376	508	15	198	305	432	564	66	229	356	488	620	122	160	287	419	546	28	211	343	475	577	84
1	133	265	392	524	57	189	316	448	555	113	245	372	479	606	44	171	278	410	537	100	202	334	461	593
161	293	425	527	34	217	349	451	583	90	148	255	382	514	16	179	306	438	570	72	235	362	494	621	103
321	428	560	62	194	352	484	611	118	250	283	415	542	49	151	339	466	598	80	207	270	397	504	6	138
456	588	95	222	329	387	519	21	128	260	443	575	52	184	311	499	601	108	240	367	405	532	39	166	298
616	123	230	357	489	547	29	156	288	420	578	85	212	344	471	509	11	143	275	377	565	67	199	301	433
480	607	114	241	373	406	538	45	172	279	462	594	96	203	335	393	525	2	134	261	449	551	58	190	317
515	17	149	251	383	566	73	180	307	439	622	104	231	363	495	528	35	162	294	421	584	86	218	350	452
50	152	284	411	543	76	208	340	467	599	7	139	266	398	505	63	195	322	429	556	119	246	353	485	612
185	312	444	571	53	236	368	500	602	109	167	299	401	533	40	223	330	457	589	91	129	256	388	520	22
345	472	579	81	213	271	378	510	12	144	302	434	561	68	200	358	490	617	124	226	289	416	548	30	157

Abb. 11.284: Bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 25$ (Hendricks)

11.6.3 Li Wen

Im Jahre 2002 veröffentlichte Li Wen ein pandiagonales bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 25$.[70] Li Wen benutzt eine Formel, mit der die Zahlen z in den einzelnen Zellen direkt berechnet werden können.

$$z = 25 \cdot (5 \cdot m_1 + m_2) + 5 \cdot m_{34} + m_{56} + 1;$$

Um seine Formel etwas vereinfacht darstellen zu können, werden hier folgende Zwischenwerte benutzt:

$$\begin{aligned}
x_1 &\equiv x/5 \\
x_2 &\equiv x && \mod 5 \\
y_1 &\equiv y/5 \\
y_2 &\equiv y && \mod 5 \\
m_1 &\equiv (2 \cdot x_1 + y_1) && \mod 5 \\
m_2 &\equiv (x_2 + 2 \cdot y_2) && \mod 5 \\
m_3 &\equiv (3 \cdot x_1 + y_1) && \mod 5 \\
m_4 &\equiv (x_2 + 3 \cdot y_2) && \mod 5 \\
m_5 &\equiv (3 \cdot x_1 + y_1) && \mod 5 \\
m_6 &\equiv (x_2 + 3 \cdot y_2) && \mod 5 \\
m_{34} &\equiv (m_3 + m_4) && \mod 5 \\
m_{56} &\equiv (m_5 + 2 \cdot m_6) && \mod 5
\end{aligned}$$

Mit dieser Formel von Li Wen ergibt sich das pandiagonale bimagische Quadrat der Ordnung $n = 25$ aus Abbildung 11.285.

Diese Formel bietet natürlich Spielraum für andere Parameter. So habe ich in einigen Termen die Faktoren verändert und auf mögliche Werte für die benutzten Parameter untersucht.

$$\begin{aligned}
x_1 &\equiv x/5 \\
x_2 &\equiv x && \mod 5 \\
y_1 &\equiv y/5 \\
y_2 &\equiv y && \mod 5 \\
m_1 &\equiv (a \cdot x_1 + b \cdot y_1) && \mod 5 \\
m_2 &\equiv (c \cdot x_2 + d \cdot y_2) && \mod 5 \\
m_3 &\equiv (e \cdot x_1 + f \cdot y_1) && \mod 5 \\
m_4 &\equiv (g \cdot x_2 + h \cdot y_2) && \mod 5 \\
m_5 &\equiv (3 \cdot x_1 + y_1) && \mod 5 \\
m_6 &\equiv (x_2 + 3 \cdot y_2) && \mod 5 \\
m_{34} &\equiv (i \cdot m_3 + j \cdot m_4) && \mod 5 \\
m_{56} &\equiv (k \cdot m_5 + l \cdot m_6) && \mod 5
\end{aligned}$$

[70] Li Wen [579]

1	33	65	92	124	269	296	303	335	362	507	539	566	598	605	150	152	184	211	243	388	420	447	454	481
67	99	101	8	40	310	337	369	271	278	573	580	607	514	541	186	218	250	127	159	429	456	488	395	422
108	15	42	74	76	371	253	285	312	344	614	516	548	555	582	227	134	161	193	225	495	397	404	431	463
49	51	83	115	17	287	319	346	353	260	530	557	589	616	523	168	200	202	234	136	406	438	470	497	379
90	117	24	26	58	328	360	262	294	321	591	623	505	532	564	209	236	143	175	177	472	479	381	413	445
132	164	191	223	230	400	402	434	461	493	13	45	72	79	106	251	283	315	342	374	519	546	553	585	612
198	205	232	139	166	436	468	500	377	409	54	81	113	20	47	317	349	351	258	290	560	587	619	521	528
239	141	173	180	207	477	384	411	443	475	120	22	29	56	88	358	265	292	324	326	621	503	535	562	594
155	182	214	241	148	418	450	452	484	386	31	63	95	122	4	299	301	333	365	267	537	569	596	603	510
216	248	130	157	189	459	486	393	425	427	97	104	6	38	70	340	367	274	276	308	578	610	512	544	571
263	295	322	329	356	501	533	565	592	624	144	171	178	210	237	382	414	441	473	480	25	27	59	86	118
304	331	363	270	297	567	599	601	508	540	185	212	244	146	153	448	455	482	389	416	61	93	125	2	34
370	272	279	306	338	608	515	542	574	576	246	128	160	187	219	489	391	423	430	457	102	9	36	68	100
281	313	345	372	254	549	551	583	615	517	162	194	221	228	135	405	432	464	491	398	43	75	77	109	11
347	354	256	288	320	590	617	524	526	558	203	235	137	169	196	466	498	380	407	439	84	111	18	50	52
394	421	428	460	487	7	39	66	98	105	275	277	309	336	368	513	545	572	579	606	126	158	190	217	249
435	462	494	396	403	73	80	107	14	41	311	343	375	252	284	554	581	613	520	547	192	224	226	133	165
496	378	410	437	469	114	16	48	55	82	352	259	286	318	350	620	522	529	556	588	233	140	167	199	201
412	444	471	478	385	30	57	89	116	23	293	325	327	359	261	531	563	595	622	504	174	176	208	240	142
453	485	387	419	446	91	123	5	32	64	334	361	268	300	302	597	604	506	538	570	215	242	149	151	183
525	527	559	586	618	138	170	197	204	231	376	408	440	467	499	19	46	53	85	112	257	289	316	348	355
561	593	625	502	534	179	206	238	145	172	442	474	476	383	415	60	87	119	21	28	323	330	357	264	291
602	509	536	568	600	245	147	154	181	213	483	390	417	449	451	121	3	35	62	94	364	266	298	305	332
543	575	577	609	511	156	188	220	247	129	424	426	458	490	392	37	69	96	103	10	280	307	339	366	273
584	611	518	550	552	222	229	131	163	195	465	492	399	401	433	78	110	12	44	71	341	373	255	282	314

Abb. 11.285: Pandiagonales bimagisches Quadrat der Ordnung 25 (Li Wen)

Insgesamt ergeben sich dabei 49 152 Kombinationen von Parametern, die zu pandiagonalen bimagischen Quadraten führten.

Belegung											
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
2	1	4	3	1	2	3	4	1	1	2	3

Es stellt sich aber heraus, dass nur 6144 dieser Quadrate auch wirklich verschieden sind. Eines dieser Quadrate ist in Abbildung 11.286 dargestellt.

1	120	84	73	37	258	372	336	305	294	515	604	593	557	546	142	231	225	189	153	399	488	452	441	410
98	62	26	20	109	330	319	283	272	361	582	571	540	504	618	214	178	167	131	250	466	435	424	388	477
45	9	123	87	51	297	261	355	344	308	529	518	607	596	565	156	150	239	203	192	413	377	491	460	449
112	76	70	34	23	369	333	322	286	255	621	590	554	543	507	228	217	181	175	139	485	474	438	402	391
59	48	12	101	95	311	280	269	358	347	568	532	521	615	579	200	164	128	242	206	427	416	385	499	463
140	229	218	182	171	392	481	475	439	403	24	113	77	66	35	251	370	334	323	287	508	622	586	555	544
207	196	165	129	243	464	428	417	381	500	91	60	49	13	102	348	312	276	270	359	580	569	533	522	611
154	143	232	221	190	406	400	489	453	442	38	2	116	85	74	295	259	373	337	301	547	511	605	594	558
246	215	179	168	132	478	467	431	425	389	110	99	63	27	16	362	326	320	284	273	619	583	572	536	505
193	157	146	240	204	450	414	378	492	456	52	41	10	124	88	309	298	262	351	345	561	530	519	608	597
274	363	327	316	285	501	620	584	573	537	133	247	211	180	169	390	479	468	432	421	17	106	100	64	28
341	310	299	263	352	598	562	526	520	609	205	194	158	147	236	457	446	415	379	493	89	53	42	6	125
288	252	366	335	324	545	509	623	587	551	172	136	230	219	183	404	393	482	471	440	31	25	114	78	67
360	349	313	277	266	612	576	570	534	523	244	208	197	161	130	496	465	429	418	382	103	92	56	50	14
302	291	260	374	338	559	548	512	601	595	186	155	144	233	222	443	407	396	490	454	75	39	3	117	81
383	497	461	430	419	15	104	93	57	46	267	356	350	314	278	524	613	577	566	535	126	245	209	198	162
455	444	408	397	486	82	71	40	4	118	339	303	292	256	375	591	560	549	513	602	223	187	151	145	234
422	386	480	469	433	29	18	107	96	65	281	275	364	328	317	538	502	616	585	574	170	134	248	212	176
494	458	447	411	380	121	90	54	43	7	353	342	306	300	264	610	599	563	527	516	237	201	195	159	148
436	405	394	483	472	68	32	21	115	79	325	289	253	367	331	552	541	510	624	588	184	173	137	226	220
517	606	600	564	528	149	238	202	191	160	376	495	459	448	412	8	122	86	55	44	265	354	343	307	296
589	553	542	506	625	216	185	174	138	227	473	437	401	395	484	80	69	33	22	111	332	321	290	254	368
531	525	614	578	567	163	127	241	210	199	420	384	498	462	426	47	11	105	94	58	279	268	357	346	315
603	592	556	550	514	235	224	188	152	141	487	451	445	409	398	119	83	72	36	5	371	340	304	293	257
575	539	503	617	581	177	166	135	249	213	434	423	387	476	470	61	30	19	108	97	318	282	271	365	329

Abb. 11.286: Pandiagonales bimagisches Quadrat von Li Wen (Li Wen, Beispiel 2)

11.6.4 Taneja

Ein weiteres Verfahren zur Konstruktion pandiagonaler bimagischer Quadrate habe ich in einem Artikel von Inder J. Taneja gefunden.[71] Dieses Verfahren ähnelt ein wenig dem Verfahren von Li Wen, erzeugt aber andere bimagische Quadrate.

Taneja geht von einem pandiagonalen magischen Quadrat der Ordnung $n = 5$ aus, mit dem diagonale Euler-Quadrate erzeugt werden, die dann zu einem pandiagonalen bimagischen Quadrat zusammengesetzt werden.

[71] Taneja [533]

1	22	18	14	10
13	9	5	21	17
25	16	12	8	4
7	3	24	20	11
19	15	6	2	23

Abb. 11.287: Pandiagonales magisches Ausgangsquadrat

In diesem Ausgangsquadrat werden alle Zahlen um 1 vermindert und im Zahlensystem zur Basis 5 dargestellt. In Abbildung 11.288 werden zusätzlich die linken und rechten Ziffern dieser Zahlen in eigenen Quadraten dargestellt.

00	41	32	23	14
22	13	04	40	31
44	30	21	12	03
11	02	43	34	20
33	24	10	01	42

a) Fünfer-System

0	4	3	2	1
2	1	0	4	3
4	3	2	1	0
1	0	4	3	2
3	2	1	0	4

b) L: linke Ziffern

0	1	2	3	4
2	3	4	0	1
4	0	1	2	3
1	2	3	4	0
3	4	0	1	2

c) R: rechte Ziffern

Abb. 11.288: Zerlegung des pandiagonalen Ausgangsquadrates

Danach werden die beiden Quadrate L und R insgesamt 25 Mal miteinander kombiniert und damit die diagonalen Euler-Quadrate erstellt. Damit das Verfahren nicht durch zusätzliche mathematische Berechnungen verschleiert wird, werden die Zeilen und Spalten in den Quadraten der Ordnung 5 von der linken oberen Ecke mit 0 ausgehend aufsteigend nach unten und nach rechts durchnummeriert.

Dies gilt auch für die 25 Teilquadrate der Größe 5 x 5 in den beiden Euler-Quadraten der Ordnung $n = 25$. Hier gibt die erste Ziffer die Zeilennummer und die zweite Ziffer die Spaltennummer des betreffenden 5 x 5 - Teilquadrates an.

	0	1	2	3	4
0	00	01	02	03	04
1	10	11	12	13	14
2	20	21	22	23	24
3	30	31	32	33	34
4	40	41	42	43	44

Abb. 11.289: Kennzeichnung der 5 x 5 - Teilquadrate im ersten Hilfsquadrat der Ordnung 25

Alle 25 Teilquadrate des ersten Hilfsquadrates werden nur mit den Zahlen aus einer Zeile des Ausgangsquadrates gefüllt, wobei die Zahlen der einzelnen Zeilen jedoch in unterschiedlicher Reihenfolge angeordnet werden. Welche Zeile des Ausgangsquadrates dazu gewählt wird, bestimmt das Quadrat L. Soll beispielsweise das Teilquadrat 00 in der linken oberen Ecke des ersten Hilfsquadrates aus Abbildung 11.289 gefüllt werden, ergibt sich an der gleichen Position des Quadrates L der Index 0. Damit treten in diesem 5 x 5 - Teilquadrat nur die Zahlen aus der Zeile 0 des Ausgangsquadrates auf, also die Zahlen, 1, 22, 18, 14, 10 .

Für die linke Spalte des Hilfsquadrates werden die Zahlen aus den Zeilen in der Reihenfolge 0, 2, 4, 1, 3 benutzt, die sich aus der linken Spalte des Quadrates L ergibt. Für die obere Zeile lautet der zu benutzende Zeilenindex 0, so dass in jeder Zeile des zu füllenden 5 x 5 - Teilquadrates nur die Zahlen 1, 22, 18, 14, 10 auftreten. Diese fünf Zahlen des Ausgangsquadrates werden von links nach rechts mit den Indizes 0, 1, 2, 3, 4 , also den zugehörigen Spaltennummern, gekennzeichnet.

	0	1	2	3	4
0	00	01	02	03	04
1	10	11	12	13	14
2	20	21	22	23	24
3	30	31	32	33	34
4	40	41	42	43	44

a) 5 x 5 - Teilquadrate

	0	1	2	3	4
0	0	4	3	2	1
1	2	1	0	4	3
2	4	3	2	1	0
3	1	0	4	3	2
4	3	2	1	0	4

b) Quadrat L

	0	1	2	3	4
0	1	22	18	14	10
1	13	9	5	21	17
2	25	16	12	8	4
3	7	3	24	20	11
4	19	15	6	2	23

c) Ausgangsquadrat

Abb. 11.290: Ausgangszahlen für das erste Teilquadrat

Die Reihenfolge, mit denen diese fünf Zahlen in die obere Zeile des zu füllendes 5 x 5 - Teilquadrates 00 eingetragen werden, ergibt sich aus der zugehörigen Zeile des Quadrates L. Dort ergibt die Reihenfolge 0, 4, 3, 2, 1 , so dass die Zahlen des Ausgangsquadrates in der Reihenfolge 1, 10, 14, 18, 22 eingetragen werden.

0	4	3	2	1
2	1	0	4	3
4	3	2	1	0
1	0	4	3	2
3	2	1	0	4

a) Quadrat L

1	10	14	18	22

b) Teilquadrat 00

Für die nächste Zeile benutzt man die Reihenfolge, die durch die zweite Zeile des Quadrates L festgelegt wird. Mit der Reihenfolge 2, 1, 0, 4, 3 werden also die Zahlen 18, 22, 1, 10, 14 eingetragen.

0	4	3	2	1
2	1	0	4	3
4	3	2	1	0
1	0	4	3	2
3	2	1	0	4

c) Quadrat L

1	10	14	18	22
18	22	1	10	14

d) Teilquadrat 00

Füllt man entsprechend auch die verbleibenden drei Zeilen, erhält man das vollständige Teilquadrat 00 wie in Abbildung 11.291, das dann an der entsprechende Position 00 im Hilfsquadrat der Ordnung 25 eingefügt werden kann.

0	4	3	2	1
2	1	0	4	3
4	3	2	1	0
1	0	4	3	2
3	2	1	0	4

e) Quadrat L

1	10	14	18	22
18	22	1	10	14
10	14	18	22	1
22	1	10	14	18
14	18	22	1	10

f) Teilquadrat 00

Abb. 11.291: Vollständig gefülltes Teilquadrat 00

Für das direkt darunter liegende Teilquadrat 10 ergibt sich aus dem Quadrat L die Kennziffer 2, so dass alle Zeilen dieses Teilquadrates mit den Zahlen $25, 16, 12, 8, 4$ gefüllt werden müssen. Die Reihenfolge dieser Zahlen ergibt sich wieder aus den Zeilen des Quadrates L, deren Zahlen als Indizes benutzt werden.

	0	1	2	3	4
0	0	4	3	2	1
1	2	1	0	4	3
2	4	3	2	1	0
3	1	0	4	3	2
4	3	2	1	0	4

a) Quadrat L

	0	1	2	3	4
0	1	22	18	14	10
1	13	9	5	21	17
2	25	16	12	8	4
3	7	3	24	20	11
4	19	15	6	2	23

b) Ausgangsquadrat

25	4	8	12	16
12	16	25	4	8
4	8	12	16	25
16	25	4	8	12
8	12	16	25	4

c) Teilquadrat 01

Abb. 11.292: Vollständig gefülltes Teilquadrat 01

Als drittes Beispiel soll noch das Teilquadrat mit der Kennziffer 21 betrachtet werden. Hier wird die zugehörige Zeile mit 3 bestimmt, da sich dieser Wert in Zeile 2 und Spalte 1 des Quadrates L befindet. Damit ergeben sich die zu benutzenden Zahlen aus Zeile 3 des Ausgangsquadrates und lauten damit $7, 3, 24, 20, 11$.

	0	1	2	3	4
0	0	4	3	2	1
1	2	1	0	4	3
2	4	3	2	1	0
3	1	0	4	3	2
4	3	2	1	0	4

a) Quadrat L

	0	1	2	3	4
0	1	22	18	14	10
1	13	9	5	21	17
2	25	16	12	8	4
3	7	3	24	20	11
4	19	15	6	2	23

b) Ausgangsquadrat

7	11	20	24	3
24	3	7	11	20
11	20	24	3	7
3	7	11	20	24
20	24	3	7	11

c) Teilquadrat 21

Abb. 11.293: Vollständig gefülltes Teilquadrat 21

Füllt man entsprechend alle 25 Teilquadrate, erhält man das erste Hilfsquadrat aus Abbildung 11.294.

			0					1					2					3					4		
	1	10	14	18	22	19	23	2	6	15	7	11	20	24	3	25	4	8	12	16	13	17	21	5	9
	18	22	1	10	14	6	15	19	23	2	24	3	7	11	20	12	16	25	4	8	5	9	13	17	21
0	10	14	18	22	1	23	2	6	15	19	11	20	24	3	7	4	8	12	16	25	17	21	5	9	13
	22	1	10	14	18	15	19	23	2	6	3	7	11	20	24	16	25	4	8	12	9	13	17	21	5
	14	18	22	1	10	2	6	15	19	23	20	24	3	7	11	8	12	16	25	4	21	5	9	13	17
	25	4	8	12	16	13	17	21	5	9	1	10	14	18	22	19	23	2	6	15	7	11	20	24	3
	12	16	25	4	8	5	9	13	17	21	18	22	1	10	14	6	15	19	23	2	24	3	7	11	20
1	4	8	12	16	25	17	21	5	9	13	10	14	18	22	1	23	2	6	15	19	11	20	24	3	7
	16	25	4	8	12	9	13	17	21	5	22	1	10	14	18	15	19	23	2	6	3	7	11	20	24
	8	12	16	25	4	21	5	9	13	17	14	18	22	1	10	2	6	15	19	23	20	24	3	7	11
	19	23	2	6	15	7	11	20	24	3	25	4	8	12	16	13	17	21	5	9	1	10	14	18	22
	6	15	19	23	2	24	3	7	11	20	12	16	25	4	8	5	9	13	17	21	18	22	1	10	14
2	23	2	6	15	19	11	20	24	3	7	4	8	12	16	25	17	21	5	9	13	10	14	18	22	1
	15	19	23	2	6	3	7	11	20	24	16	25	4	8	12	9	13	17	21	5	22	1	10	14	18
	2	6	15	19	23	20	24	3	7	11	8	12	16	25	4	21	5	9	13	17	14	18	22	1	10
	13	17	21	5	9	1	10	14	18	22	19	23	2	6	15	7	11	20	24	3	25	4	8	12	16
	5	9	13	17	21	18	22	1	10	14	6	15	19	23	2	24	3	7	11	20	12	16	25	4	8
3	17	21	5	9	13	10	14	18	22	1	23	2	6	15	19	11	20	24	3	7	4	8	12	16	25
	9	13	17	21	5	22	1	10	14	18	15	19	23	2	6	3	7	11	20	24	16	25	4	8	12
	21	5	9	13	17	14	18	22	1	10	2	6	15	19	23	20	24	3	7	11	8	12	16	25	4
	7	11	20	24	3	25	4	8	12	16	13	17	21	5	9	1	10	14	18	22	19	23	2	6	15
	24	3	7	11	20	12	16	25	4	8	5	9	13	17	21	18	22	1	10	14	6	15	19	23	2
4	11	20	24	3	7	4	8	12	16	25	17	21	5	9	13	10	14	18	22	1	23	2	6	15	19
	3	7	11	20	24	16	25	4	8	12	9	13	17	21	5	22	1	10	14	18	15	19	23	2	6
	20	24	3	7	11	8	12	16	25	4	21	5	9	13	17	14	18	22	1	10	2	6	15	19	23

Abb. 11.294: Erstes Hilfsquadrat der Ordnung $n = 25$

Das zweite Hilfsquadrat der Ordnung $n = 25$ lässt sich entsprechend erstellen, nur dass hier die benutzenden Zahlen durch das Quadrat R festgelegt wird. Für das Teilquadrat mit der Kennziffer 32 ergibt sich beispielsweise aus der Zeile 3 und der Spalte 2 die Zeilennummer 3 und damit die Zahlen 7, 3, 24, 20, 11 des Ausgangsquadrates.

	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	2	3	4	0	1
2	4	0	1	2	3
3	1	2	3	4	0
4	3	4	0	1	2

a) Quadrat R

	0	1	2	3	4
0	1	22	18	14	10
1	13	9	5	21	17
2	25	16	12	8	4
3	7	3	24	20	11
4	19	15	6	2	23

b) Ausgangsquadrat

Abb. 11.295: Auswahl der Zahlen für das Teilquadrat 32

Die Reihenfolge der in die Zeilen des Teilquadrates einzutragenden Zahlen richtet hier nach den Zahlen in den Spalten des Quadrates L. In die Zeile 0 werden also die Zahlen in der Reihenfolge 0, 2, 4, 1, 3 eingetragen, in die Zeile 1 in der Reihenfolge 4, 1, 3, 0, 2 usw. Insgesamt ergibt sich damit das Teilquadrat in Abbildung 11.296.

0	4	3	2	1
2	1	0	4	3
4	3	2	1	0
1	0	4	3	2
3	2	1	0	4

a) Quadrat L

7	24	11	3	20
11	3	20	7	24
20	7	24	11	3
24	11	3	20	7
3	20	7	24	11

b) Teilquadrat 32

Abb. 11.296: Vollständig gefülltes Teilquadrat 32

Verfährt man bei den anderen 24 Teilquadraten ebenso, ergibt sich das zweite Hilfsquadrat der Ordnung 25 aus Abbildung 11.297.

			0					1					2					3					4		
	1	18	10	22	14	13	5	17	9	21	25	12	4	16	8	7	24	11	3	20	19	6	23	15	2
	10	22	14	1	18	17	9	21	13	5	4	16	8	25	12	11	3	20	7	24	23	15	2	19	6
0	14	1	18	10	22	21	13	5	17	9	8	25	12	4	16	20	7	24	11	3	2	19	6	23	15
	18	10	22	14	1	5	17	9	21	13	12	4	16	8	25	24	11	3	20	7	6	23	15	2	19
	22	14	1	18	10	9	21	13	5	17	16	8	25	12	4	3	20	7	24	11	15	2	19	6	23
	25	12	4	16	8	7	24	11	3	20	19	6	23	15	2	1	18	10	22	14	13	5	17	9	21
	4	16	8	25	12	11	3	20	7	24	23	15	2	19	6	10	22	14	1	18	17	9	21	13	5
1	8	25	12	4	16	20	7	24	11	3	2	19	6	23	15	14	1	18	10	22	21	13	5	17	9
	12	4	16	8	25	24	11	3	20	7	6	23	15	2	19	18	10	22	14	1	5	17	9	21	13
	16	8	25	12	4	3	20	7	24	11	15	2	19	6	23	22	14	1	18	10	9	21	13	5	17
	19	6	23	15	2	1	18	10	22	14	13	5	17	9	21	25	12	4	16	8	7	24	11	3	20
	23	15	2	19	6	10	22	14	1	18	17	9	21	13	5	4	16	8	25	12	11	3	20	7	24
2	2	19	6	23	15	14	1	18	10	22	21	13	5	17	9	8	25	12	4	16	20	7	24	11	3
	6	23	15	2	19	18	10	22	14	1	5	17	9	21	13	12	4	16	8	25	24	11	3	20	7
	15	2	19	6	23	22	14	1	18	10	9	21	13	5	17	16	8	25	12	4	3	20	7	24	11
	13	5	17	9	21	25	12	4	16	8	7	24	11	3	20	19	6	23	15	2	1	18	10	22	14
	17	9	21	13	5	4	16	8	25	12	11	3	20	7	24	23	15	2	19	6	10	22	14	1	18
3	21	13	5	17	9	8	25	12	4	16	20	7	24	11	3	2	19	6	23	15	14	1	18	10	22
	5	17	9	21	13	12	4	16	8	25	24	11	3	20	7	6	23	15	2	19	18	10	22	14	1
	9	21	13	5	17	16	8	25	12	4	3	20	7	24	11	15	2	19	6	23	22	14	1	18	10
	7	24	11	3	20	19	6	23	15	2	1	18	10	22	14	13	5	17	9	21	25	12	4	16	8
	11	3	20	7	24	23	15	2	19	6	10	22	14	1	18	17	9	21	13	5	4	16	8	25	12
4	20	7	24	11	3	2	19	6	23	15	14	1	18	10	22	21	13	5	17	9	8	25	12	4	16
	24	11	3	20	7	6	23	15	2	19	18	10	22	14	1	5	17	9	21	13	12	4	16	8	25
	3	20	7	24	11	15	2	19	6	23	22	14	1	18	10	9	21	13	5	17	16	8	25	12	4

Abb. 11.297: Zweites Hilfsquadrat der Ordnung $n = 25$

Mit diesen beiden Hilfsquadraten ergibt sich das pandiagonale bimagische Quadrat aus Abbildung 11.298 dadurch, dass man die beiden Hilfsquadrate überlagert. Die Zahlen des ersten Hilfsquadrates werden zunächst um 1 vermindert und dann mit 5 multipliziert und die entsprechende Zahlen des zweiten Hilfsquadrates hinzu addiert.

1	243	335	447	539	463	555	42	134	371	175	262	479	591	58	607	99	186	278	395	319	406	523	115	202
435	547	14	226	343	142	359	471	563	30	579	66	158	275	487	286	378	620	82	199	123	215	302	419	506
239	326	443	535	22	571	38	130	367	459	258	500	587	54	166	95	182	299	386	603	402	519	106	223	315
543	10	247	339	426	355	467	559	46	138	62	154	266	483	600	399	611	78	195	282	206	323	415	502	119
347	439	526	18	235	34	146	363	455	567	491	583	75	162	254	178	295	382	624	86	515	102	219	306	423
625	87	179	291	383	307	424	511	103	220	19	231	348	440	527	451	568	35	147	364	163	255	492	584	71
279	391	608	100	187	111	203	320	407	524	448	540	2	244	331	135	372	464	551	43	592	59	171	263	480
83	200	287	379	616	420	507	124	211	303	227	344	431	548	15	564	26	143	360	472	271	488	580	67	159
387	604	91	183	300	224	311	403	520	107	531	23	240	327	444	368	460	572	39	126	55	167	259	496	588
191	283	400	612	79	503	120	207	324	411	340	427	544	6	248	47	139	351	468	560	484	596	63	155	267
469	556	48	140	352	151	268	485	597	64	613	80	192	284	396	325	412	504	116	208	7	249	336	428	545
148	365	452	569	31	585	72	164	251	493	292	384	621	88	180	104	216	308	425	512	436	528	20	232	349
552	44	131	373	465	264	476	593	60	172	96	188	280	392	609	408	525	112	204	316	245	332	449	536	3
356	473	565	27	144	68	160	272	489	576	380	617	84	196	288	212	304	416	508	125	549	11	228	345	432
40	127	369	456	573	497	589	51	168	260	184	296	388	605	92	516	108	225	312	404	328	445	532	24	236
313	405	517	109	221	25	237	329	441	533	457	574	36	128	370	169	256	498	590	52	601	93	185	297	389
117	209	321	413	505	429	541	8	250	337	136	353	470	557	49	598	65	152	269	481	285	397	614	76	193
421	513	105	217	309	233	350	437	529	16	570	32	149	361	453	252	494	581	73	165	89	176	293	385	622
205	317	409	521	113	537	4	241	333	450	374	461	553	45	132	56	173	265	477	594	393	610	97	189	276
509	121	213	305	417	341	433	550	12	229	28	145	357	474	561	490	577	69	156	273	197	289	376	618	85
157	274	486	578	70	619	81	198	290	377	301	418	510	122	214	13	230	342	434	546	475	562	29	141	358
586	53	170	257	499	298	390	602	94	181	110	222	314	401	518	442	534	21	238	330	129	366	458	575	37
270	482	599	61	153	77	194	281	398	615	414	501	118	210	322	246	338	430	542	9	558	50	137	354	466
74	161	253	495	582	381	623	90	177	294	218	310	422	514	101	530	17	234	346	438	362	454	566	33	150
478	595	57	174	261	190	277	394	606	98	522	114	201	318	410	334	446	538	5	242	41	133	375	462	554

Abb. 11.298: Pandiagonales bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 25$ (Taneja)

Insgesamt existieren unter den 3600 verschiedenen pandiagonalen Quadraten der Ordnung $n = 5$ nur 50 Quadrate, mit denen pandiagonale bimagische Quadrate der Ordnung 25 erzeugt werden können. In einem zweiten Beispiel ist das pandiagonale Ausgangsquadrat zusätzlich noch symmetrisch und ultramagisch.

24	3	7	11	20
12	16	25	4	8
5	9	13	17	21
18	22	1	10	14
6	15	19	23	2

Abb. 11.299: Pandiagonales, symmetrisches und ultramagisches Ausgangsquadrat

Aus diesem Ausgangsquadrat entsteht mit diesem Verfahren das pandiagonales bimagisches Quadrat aus Abbildung 11.300, welches zusätzlich auch symmetrisch und ultramagisch ist, sowie trimagische Diagonalen besitzt.

39	126	368	460	572	496	588	55	167	259	183	300	387	604	91	520	107	224	311	403	327	444	531	23	240
468	560	47	139	351	155	267	484	596	63	612	79	191	283	400	324	411	503	120	207	6	248	340	427	544
147	364	451	568	35	584	71	163	255	492	291	383	625	87	179	103	220	307	424	511	440	527	19	231	348
551	43	135	372	464	263	480	592	59	171	100	187	279	391	608	407	524	111	203	320	244	331	448	540	2
360	472	564	26	143	67	159	271	488	580	379	616	83	200	287	211	303	420	507	124	548	15	227	344	431
508	125	212	304	416	345	432	549	11	228	27	144	356	473	565	489	576	68	160	272	196	288	380	617	84
312	404	516	108	225	24	236	328	445	532	456	573	40	127	369	168	260	497	589	51	605	92	184	296	388
116	208	325	412	504	428	545	7	249	336	140	352	469	556	48	597	64	151	268	485	284	396	613	80	192
425	512	104	216	308	232	349	436	528	20	569	31	148	365	452	251	493	585	72	164	88	180	292	384	621
204	316	408	525	112	536	3	245	332	449	373	465	552	44	131	60	172	264	476	593	392	609	96	188	280
477	594	56	173	265	189	276	393	610	97	521	113	205	317	409	333	450	537	4	241	45	132	374	461	553
156	273	490	577	69	618	85	197	289	376	305	417	509	121	213	12	229	341	433	550	474	561	28	145	357
590	52	169	256	498	297	389	601	93	185	109	221	313	405	517	441	533	25	237	329	128	370	457	574	36
269	481	598	65	152	76	193	285	397	614	413	505	117	209	321	250	337	429	541	8	557	49	136	353	470
73	165	252	494	581	385	622	89	176	293	217	309	421	513	105	529	16	233	350	437	361	453	570	32	149
346	438	530	17	234	33	150	362	454	566	495	582	74	161	253	177	294	381	623	90	514	101	218	310	422
5	242	334	446	538	462	554	41	133	375	174	261	478	595	57	606	98	190	277	394	318	410	522	114	201
434	546	13	230	342	141	358	475	562	29	578	70	157	274	486	290	377	619	81	198	122	214	301	418	510
238	330	442	534	21	575	37	129	366	458	257	499	586	53	170	94	181	298	390	602	401	518	110	222	314
542	9	246	338	430	354	466	558	50	137	61	153	270	482	599	398	615	77	194	281	210	322	414	501	118
195	282	399	611	78	502	119	206	323	415	339	426	543	10	247	46	138	355	467	559	483	600	62	154	266
624	86	178	295	382	306	423	515	102	219	18	235	347	439	526	455	567	34	146	363	162	254	491	583	75
278	395	607	99	186	115	202	319	406	523	447	539	1	243	335	134	371	463	555	42	591	58	175	262	479
82	199	286	378	620	419	506	123	215	302	226	343	435	547	14	563	30	142	359	471	275	487	579	66	158
386	603	95	182	299	223	315	402	519	106	535	22	239	326	443	367	459	571	38	130	54	166	258	500	587

Abb. 11.300: Pandiagonales, symmetrisches, ultramagisches und bimagisches Quadrat der Ordnung $n = 25$